



TYT

İçerik Dolu Defter

Matematik

Tamamı el yazması konu anlatımı ve sorulardan oluşur.
Akıllı tahtaya uyumludur. Sınıfın en çalışkan ve düzenli öğrencisinin
özenle yazdığı gibidir. Motive edici yazı ve resimler barındırır.
Eğlenceli görsel ve resimlerle bezenmiştir.
YouTube Hiper Zeka kanalında tüm konuların
video anlatımları yapılmıştır.

 **HiperZeka.**

Hiper Gençler Üstün Zekalar Kulübü



Ülkemizin geleceği olan sevgili gençler;

Elinizdeki bu yardımcı kaynak matematiğin temel konularından oluşmaktadır. İçerisinde bulunan not, uyarı, dikkat et ve çöz-öğren gibi ikonlar ile daha anlaşılabilir hale getirip sınav sorularının hızlı, doğru bir şekilde çözülmesini sağlamak ve bu durumu sizin lehinize çevirmek için hazırlanmıştır. Sınavda sorulan soruların doğru ve pratik çözümü ile elde edilecek başarı yüksek olacaktır. Bu amaçla kaynağımızda;

- * Konu anlatımlı özgün, kolay ve anlaşılabilir dil kullanımı,
- * Çöz-öğrenler ile konuyu pekiştirme,
- * Yenilenen sınav formatına uygun içeriklerle temel matematik konularını kapsayan tüm sınavlarda size yardımcı olacaktır.

Ayrıca bu kaynağı hazırlarken el yazısıyla baştan sona büyük emek sarfeden Merve İNVER'e ve içeriğini görsellerle süsleyen Sinem DELİKAN'a teşekkür ederim.

Başarılarınızın daim olması dileğiyle...

Veli HEVEŞ

ANLAT SANA BİRAZ

ÖRNEK ... razı değil 7redif
... razı değil



• Sunulan bilgiyi daha somut hâle getirmek için kullanılan örnek kullanım durumlarını sunan belirtidir.

Anlatımı destekleyici, anlatımdırmaı
kolaylaştırıcı gerekli ya da ilave olarak
verilen bilgilerin kullanıldığı belirtidir.



NOT
Plan ve topografya
haritaları büyük ölçekli
haritalardır.

UYARI
Tarihî olayların daha
kolay incelenmesi ve
öğrenilmesi için...

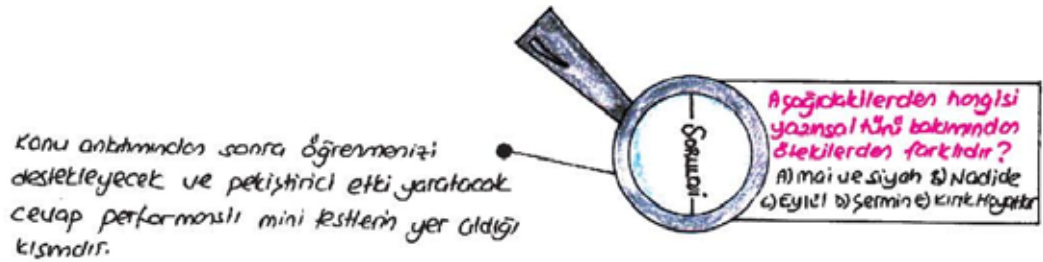
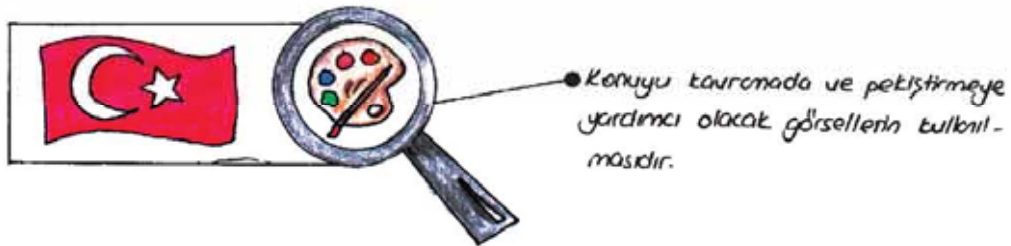
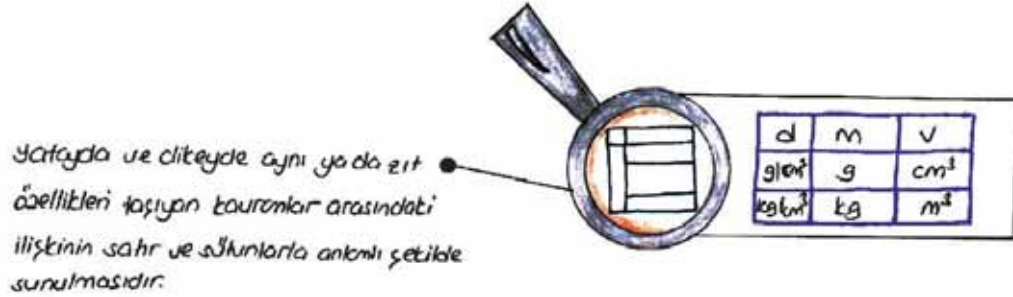
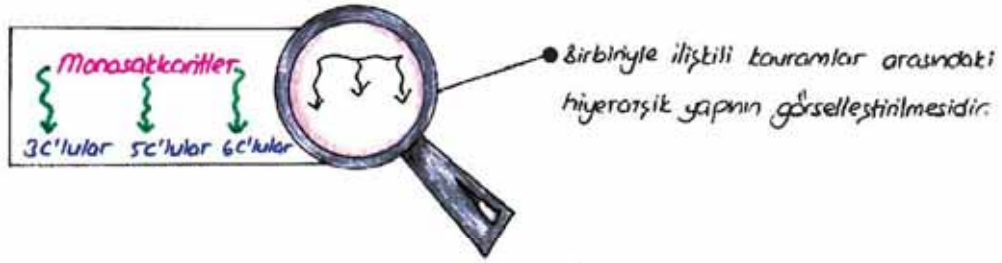


• Anlatılan konunun can alıcı ve önemli
boyutlarının vurgulandığı, işaretlerin
sunulduğu belirtidir.

Sınırlarda sıklıkla yer verilen noktalar
ve sınırlarda kıvrım ihtimali yitset den
bilgiler verilirken kullanılan belirtidir.



Ad altforması yapılarak
benzetme amacı dır.
DİKKAT



İÇİM DİŞİM
BİR

TEMEL KAVRAMLAR	1
Sayı Kümeleri	1
Pozitif-Negatif Sayılar	5
Asal Sayılar	6
Ardışık Sayılar	10
Tek ve Çift Sayılar	14
SAYI BASAMAKLARI	20
Çözümlemede Toplama	20
BÖLME - BÖLÜNEBİLME	27
Bölme	27
Bölünebilme Kuralları	29
ASAL ÇARPANLARA AYIRMA VE FAKTÖRİYEL	34
Faktöriyel	38
EBÖB - EKOK	42
RASYONEL SAYILAR	47
Öndalık Sayılar	48
BASİT EŞİTSİZLİKLER	53
MUTLAK DEĞER	59
Mutlak Değerin Özellikleri	59



İÇİM DİŞİM BİR

ÜSLÜ SAYILAR	65
Üslü Sayıların Özellikleri	65
Üslü Sayılarda İşlemler	65
Üslü Eşitsizlikler	66
Üslü Sayılarda Sıralama	68
KÖKLÜ SAYILAR	74
Köklü Sayılarda İşlemler	74
Köklü Sayılarda Sıralama	78
ÇARPANLARA AYIRMA VE ÖZDEŞLİKLER	81
Ortak Çarpan Parantezine Alma	81
Özdeşlikler	81
DENKLEM GÖZME	89
ORAN - ORANTI	93
Aritmetik Ortalama	94
Geometrik Ortalama	94
Harmonik Ortalama	94
SAYI PROBLEMLERİ	99
KESİR PROBLEMLERİ	114
YAŞ PROBLEMLERİ	118
İŞÇİ PROBLEMLERİ	123
YÜZDE - KÂR - ZARAR PROBLEMLERİ	130
Yüzde Problemleri	130
Kâr-Zarar Problemleri	138
KARIŞIM PROBLEMLERİ	144



İÇİM DİŞİM
BİR

HAREKET PROBLEMLERİ	151
GÜNLÜK HAYATTA TEKRAR EDEN DURUM PROBLEMLERİ	168
MANTIK	170
KÜMELER	182
Kümelerin Gösterimi	182
Kartezyen Çarpım	189
FONKSİYONLAR	194
Fonksiyon Çeşitleri	195
Fonksiyon Grafikleri	201
MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ	208
Merkezi Eğilim Ölçüleri	208
Merkezi Yayılım Ölçüleri	210
Verilerin Grafik ile Gösterilmesi	212
SAYMA	215
PERMÜTASYON	216
KOMBİNASYON	218
BİNOM	221
OLASILIK	224
POLİNOMLAR	235
2. DERECEDEDEN DENKLEMLER	241
2. Dereceden Denklemin Karmaşık Kökleri	243
PARABOL	246
Parabolün Denklemini Yazma	247



TEMEL KAVRAMLAR

Rakam: Sayıları ifade etmeye yarayan sembollere rakam denir. Rakam kümesinin elemanları onluk sayma sistemine göre

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ 'dır.}$$

Sayı: Rakamların bir çokluk belirtecek şekilde bir araya getirilmesiyle oluşturulan ifadeye sayı denir.

Sayı Kümeleri

Sayma Sayıları

$N^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına sayma sayısı denir.

Doğal Sayılar

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına doğal sayı denir.

Tam Sayılar

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına tam sayı denir.

$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesine pozitif tam sayılar kümesi denir.

$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ kümesine negatif tam sayılar kümesi denir.

NOT

Sıfır bir tam sayıdır. Fakat pozitif veya negatif değildir, yani işaretsizdir. Bu sebeple pozitif ve negatifliğin geçtiği sayı kümelerinde 0 bulunmaz.



Rasyonel Sayılar

a ve b birer tam sayı $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara denir.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0 \right\} \text{ 'dır.}$$

Örneğin: $-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}, 0, -1$

ifadeleri birer rasyonel sayıdır.

Reel (Gerçek) Sayılar

Sayı doğrusu üzerinde bulunan bütün sayılara denir ve R ile gösterilir.



- Toplamları verilen iki doğal sayının çarpımlarının en büyük olabilmesi için sayılar birbirine en yakın mümkünse esit seçilmelidir.

- Toplamları verilen iki doğal sayının çarpımlarının en küçük olabilmesi için sayılar birbirine en uzak seçilmelidir.

DİKKAT ET

ÇÖZ

x ve y birer doğal sayı olmak üzere,

$$x+y=16$$

olduğuna göre x.y çarpımının alabileceği en büyük ve en küçük değerler toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$x+y=16$ eşitliğinde x.y çarpımının en büyük değeri alması için $x=8$ ve $y=8$ seçilir. O

hâlde $(x.y)_{\text{en büyük}} = 8.8 = 64$ 'tür.

$x+y=16$ eşitliğinde x.y çarpımının en küçük değeri olması için $x=0$ ve $y=16$ seçilir. O

hâlde $(x.y)_{\text{en küçük}} = 0.16 = 0$ 'dır.

Bu durumda x.y'nin en büyük ve en küçük değerinin toplamı $0+64 = 64$ bulunur.



NOT

• Çarpımları verilen iki doğal sayının toplamlarının en büyük olması için sayılar birbirine en uzak seçilmelidir.

• Çarpımları verilen iki doğal sayının toplamlarının en küçük olması için sayılar birbirine en yakın mümkünse eşit seçilmelidir.

ÇÖZ

x ve y birer doğal sayıdır.

$$x.y=36$$

olduğuna göre x+y toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$x.y=36$ eşitliğinde x+y toplamının en küçük değeri alması için $x=6$ ve $y=6$ seçilmelidir. O hâlde, $(x+y)_{\text{en küçük}} = 6+6 = 12$ 'dir.

$x.y=36$ eşitliğinde x+y toplamının en büyük değeri alması için $x=1$ ve $y=36$ seçilmelidir. O hâlde,

$$(x+y)_{\text{en büyük}} = 1+36 = 37 \text{ 'dir.}$$

Buna göre x+y toplamının en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı $12+37 = 49$ bulunur.

"Her neyi
düşünüyorsan
oraya aitsin."

Tayfun Topaloğlu

Çöz

x ve y doğal sayılar olmak üzere,
 $2x + 5y = 42$
 olduğuna göre x kaç farklı
 değer alır?

Öğren

Bu bir soru kalıbıdır ve çaprazlama metodu ile çözülür. Bu metotta öncelikle x ve y 'nin katsayılarından hangisi sonuca tam olarak bölünüyorsa (ikisi de bölünüyorsa herhangi birine) onun bilinmeyenine sıfır değeri verilerek diğer bilinmeyen bulunur.

Birinci sayı bulunduğundan sonra büyük sayı çaprazındaki sayı kadar azaltılır, küçük sayı da çaprazındaki sayı kadar artırılarak her sayının karşısına 1 sayı gelecek şekilde bütün sayılar bulunur.

Buna göre,

$$2x + 5y = 42$$

$$-5(21) \rightarrow 0 + 2$$

$$-5(16) \rightarrow 2 + 2$$

$$-5(11) \rightarrow 4 + 2$$

$$-5(6) \rightarrow 6 + 2$$

$$-5(1) \rightarrow 8 + 2$$

Şeklinde dir. O hâlde x 'in alabileceği değerler 5 tane dir.

Çöz

x, y, z birbirinden farklı pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$2x + 3y + 4z = 47$$

olduğuna göre $x+y+z$ toplamının en büyük değeri kaçtır?

Öğren

$2x + 3y + 4z = 47$ eşitliğinde $x+y+z$ toplamının en büyük olması için kat sayısı en küçük olan ifade (yani x) en büyük, katsayısı en büyük olan ifade (yani z) en küçük seçilmelidir.

$$2x + 3y + 4z = 47$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 2 & & 1 \end{array}$$

O hâlde $z=1, y=2$ seçilirse,

$$2x + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 47$$

$$2x + 10 = 47 \quad 2x = 37$$

olacağından x 'in tam sayı değeri bulunamaz. Bu durumda,

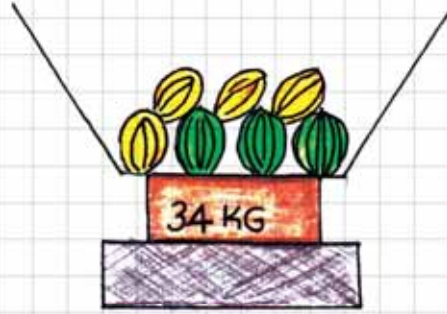
$$2x + 3y + 4z = 47$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 18 & 1 & 2 \end{array}$$

$x=18, y=1$ ve $z=2$ seçilirse

$$(x+y+z)_{\text{en büyük}} = 18 + 1 + 2 = 21 \text{ bulunur.}$$

Çöz



Ağırlıkları birer tamsayı olan özdeş 4 tane kavun ve özdeş 3 tane karpuz şekildeki gibi elektronik tartı ile tartılınca 34 kg geliyor.

Buna göre, bir kavunun ve bir karpuzun toplam ağırlığı en az kaç kg'dır?

Öğren

karpuz = x
kavun = y } dersek

3 tane karpuz $3x$

4 tane kavun $4y$

$$4y + 3x = 34$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 1 & 10 \end{array} \rightarrow 1 + 10 = 11$$

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \end{array} \rightarrow 4 + 6 = 10$$

$$\begin{array}{cc} 7 & 2 \end{array} \rightarrow 7 + 2 = 9 \Rightarrow \text{en az } 9 \text{ olur.}$$

"Senin almaya cesaret edemediğin riskleri alanlar, senin yaşamak istediğin hayatı yaşarlar."

Sokrates

Pozitif ve Negatif Sayılar

Sıfırın sağında kalan sayılara pozitif sayılar, sıfırın solunda kalan sayılara negatif sayılar denir.



Pozitif sayılar (+) işareti ile negatif sayılar (-) işareti ile gösterilir.

* Aynı işaretli iki sayının çarpımı veya bölümü pozitiftir.

$$(+).(+)=(+), (+):(+)=(+)$$

$$(-).(-)=(+), (-):(-)=(+)$$

* Farklı işaretli iki sayının çarpımı veya bölümü negatiftir.

$$(+).(-)=(-), (+):(-)=(-)$$

$$(-).(+)=(-), (-):(+) = (-)$$

* Pozitif sayıların kuvveti ister tek ister çift sayı olsun sonuç daima pozitiftir.

$a > 0$ olmak üzere,

$a^{\text{çift}} > 0$ ve $a^{\text{tek}} > 0$ 'dır.

* Negatif sayıların tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri ise pozitiftir.

$a < 0$ olmak üzere,

$a^{\text{çift}} > 0$ ve $a^{\text{tek}} < 0$ 'dır.



NOT

Tek kuvvetlerin pozitif veya negatif kavramlara etkisi olmadığından tek kuvvet dikkate alınmaz.

Diğer bir deyişle kuvvet tek ise kuvvet çizilerek sayının pozitif veya negatif olduğu bulunur.

$a^8 < 0$ ise $a < 0$ 'dır.

Çift kuvvetlerde ise tabandaki sayı ister pozitif ister negatif olsun sonuç daima pozitiftir.

Diğer bir deyişle kuvvet çift ise sonuç daima pozitif olduğundan sayının tamamı atılır.

"Yüzüstü yere serilseniz bile, hâlâ pleniye doğru hareket ediyorsunuzdur."

Victor Kiam

ÇÖZ

$$a^3 \cdot b^4 > 0$$

$$a^2(b-c) < 0$$

$$a^4 \cdot b^2 \cdot c < 0$$

olduğuna göre a, b ve c 'yi küçüktten büyüğe doğru sıralayınız?

ÖĞREN

Kuvveti tek olan sayıların sadece kuvveti, kuvveti çift olan sayıların tamamı çizi-
lererek işlem yapılır.

$a^3 \cdot b^4 > 0 \Rightarrow a > 0$ yani a pozitifdir.

$a^2 \cdot (b-c) < 0 \Rightarrow b-c < 0$ yani $b < c$

$a^4 \cdot b^2 \cdot c < 0 \Rightarrow c < 0$ yani c negatiftir.

c negatif ise $c > b$ olduğuna göre (negatif bir sayı başka bir negatif sayıdan büyük olur) $b < 0$ olur.

Pozitif bir sayı negatif sayılardan daha büyük olacağından a en büyük ve $b < c$ olduğundan sıralama;
 $b < c < a$ bulunur.

Asal Sayılar

1 ve kendisinden başka pozitif tam sayı böleni (veya çarpanı) olmayan 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ... birer asal sayıdır.

✓ En küçük asal sayı 2'dir.

✓ 2'den başka çift asal sayı yoktur.

✓ 2 ve 3 dışındaki asal sayılar 6'nın kollarının 1 eksiği veya 1 fazlasından en az biri asal sayıdır.

ÇÖZ

a ve b birer doğal sayı olmak üzere $a^2 - b^2 = 17$ olduğuna göre a sayısı kaçtır?

ÖĞREN

$a^2 - b^2 = 17$ olduğuna göre,
($a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$ özdeşliğinden yararlanılırsa)

$$a^2 - b^2 = 17 \Rightarrow \underbrace{(a-b)}_1 \cdot \underbrace{(a+b)}_{17}$$

17 sayısı asal sayı olduğu için, yalnızca 1 ve kendisinin çarpımı biçiminde yazılabilir.

$$\left. \begin{array}{l} a-b=1 \\ + \quad a+b=17 \end{array} \right\} \text{Taraf tarafa toplayalım}$$

$$\hline 2a = 18$$

$$a = 9 \text{ bulunur.}$$

Çöz

1'den büyük asal olmayan bir tam sayının rakamlarının toplamı, sayı asal çarpanlarına ayrılacak yazıldığında, bu yazılışta bulunan tüm asal sayıların rakamlarının toplamına eşit olursa bu tür sayılara smith sayı adı verilir.

Örneğin, 728 sayısı asal çarpanlarına

$728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13$ biçiminde ayrılır.

$7+2+8 = 2+2+2+1+3+7$ olduğundan 728 bir smith sayısıdır.

Bu tanıma göre,

I. 4

II. 21

III. 22 ifadelerinden hangisi smith sayısıdır?

Öğren

I. $4 = 2 \cdot 2 \Rightarrow 4 = 2+2$ olduğundan 4 bir smith sayısıdır.

II. $21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow 2+1 \neq 3+7$ olduğundan, 21 bir smith sayısı değildir.

III. $22 = 2 \cdot 11 \Rightarrow 2+2 = 2+1+1$ 22 bir smith sayısıdır.

Çöz

a, b ve c asal sayılar olmak üzere,

$ab + ac = 4a^2 + 8$ olduğuna göre a.b.c çarpımı kaçtır?

Öğren

a, b, c asal sayılardır.

Çift sayı olan asal sadece

2'dir. Diğer bütün asal sayılar tek sayıdır.

$$ab + ac = 4a^2 + 8 \Rightarrow a(b+c) = 4(a^2+2)$$

Çift sayı

$$a(b+c) = 2 \cdot 2(a^2+2)$$

$$a(b+c) = 2(2a^2+4)$$

$$a = 2, b+c = 2a^2+4$$

$$b+c = 2 \cdot 2^2+4$$

$$b+c = 12 \quad b=7 \quad c=5$$

$$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

"Unutma bir şeyin yapılamaz olduğunu düşünerek uyursan, başkasının o şeyi yaparken çıkardığı gürültüyle uyanırsın."

Konfüçyus

ÇÖZ



Merve elinde bulunan 10 tane kumbaraya asal sayılar kadar para koyuyor. Elinde bulunan 1 TL'lik paraları sırasıyla kumbaralara atıyor. Örneğin 1. kumbaraya 2 TL, 2. kumbaraya, 3 TL gibi 10. kumbaraya attıktan sonra 1. kumbaraya tekrardan dönüyor.

Buna göre Merve 170 TL'yi hangi kumbaraya atmış olur?

ÖĞREN

Elimizde toplam 170 TL varsa;

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 41 = 170$$



10. kumbaraya 29 TL atıldığına göre geriye kalan 41 TL'yi 1. kumbaradan itibaren tekrar dağıtmaya başlayacağız.



Sonuç olarak 6. kumbaraya ikinci defa 13 TL attığımızda 170 TL'yi bitirmiş oluruz.

Çöz

Bir mağaza indirim sezonu dolayısıyla bütün ürünlerinin fiyatını 30'dan küçük asal sayı fiyatlarına satmaktadır.

Örneğin; Gömör 2 lira, atkı 5 lira gibi.

Buna göre, bu mağaza dan 325 liraya para artmayacak şekilde en az kaç parça ürün alınabilir?

Öğren

30'dan küçük en büyük asal sayı 29'dur.

$$\begin{array}{r} 325 \\ - 29 \\ \hline 35 \\ - 29 \\ \hline 6 \end{array}$$

6 → Kalan 6 liraya da 3'er liradan iki parçada buradan.

Toplamda en az :

$11 + 2 = 13$ parça eşya alabilmiştir.

Çöz

a bir pozitif tam sayı ve $p = a^2 + 5$ 'tir. p asal sayı olduğuna göre, hangileri doğrudur?

I. a tek sayıdır.

II. p 'nin 2 ile bölümünden kalan 1'dir.

III. $a^2 + p$ asal sayıdır.

Öğren

a bir pozitif sayı ve p asal olduğundan p tek olmalı çünkü tek çift asal sayı 2 olduğundan $a^2 + 5$ ifadesi her zaman "2"den büyüktür.

$$\begin{array}{ccc} p & = & a^2 + 5 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ T & & F \quad T \end{array}$$

$a=2$ için $p=4+5=9$ (asal değil)

$a=4$ için $p=16+5=21$ (asal değil)

$a=6$ için $p=36+5=41$ (asal)

I. öncül, yanlış

II. öncül, $p=41$ 'in 2 ile bölümünden kalan "1" dir. Öncül doğrudur.

III. öncül, $a^2 + p = 6^2 + 41$

Öncül yanlıştır. $=77$ asal sayı değildir.

Aralarında Asal Sayılar

En az bir sıfırdan farklı olan a ve b tam sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü 1 ise bu iki sayıya aralarında asal sayılar denir. Diğer bir ifadeyle eğer sayıları sadeleştirilebileceğimiz başka bir sayı yoksa sayılar aralarında asal sayılardır.

✗ Ardışık olan pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

✗ a ile b aralarında asal iki pozitif tam sayı ise $(a+b)$ ve $(a \cdot b)$ de aralarında asaldır.

✗ a ile b ve x ile y aralarında asal sayılar olmak üzere,

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \text{ ise } a=x \text{ ve } b=y \text{ dir.}$$

"Bir gün kalkacaksınız ve
hep hayal ettiğiniz şeyleri
yapmaya vakit kalmamış
olacak. Şimdi tam zamanı.
Harekete geçin."

Paulo Coelho

Çöz

$a-2b$ ile $3a+2b$ aralarında asal olmak üzere $\frac{a-2b}{3a+2b} = \frac{108}{84}$ olduğuna göre a kaçtır?

Öğren

$\frac{108}{84}$ kesrini 12 ile sadeleştirirsek

$$\frac{108}{84} = \frac{9}{7} \text{ elde edilir.}$$

$$\frac{a-2b}{3a+2b} = \frac{9}{7} \text{ eşitliğinin sol}$$

tarafındaki pay ve payda aralarında asal, sağ tarafındaki pay ve paydalar aralarında asal olduğuna göre karşılıklı olarak pay ve paydalar eşitlenir.

$$a-2b=9 \text{ ve } 3a+2b=7 \text{ bulunur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a-2b=9 \\ 3a+2b=7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Taraf tarafa} \\ \text{toplarsak} \end{array}$$

$$4a=16 \quad a=4 \text{ bulunur.}$$

Ardışık Sayılar

Ardışık terimleri arasındaki farkları eşit olan sayılara denir.

n bir tam sayı olmak üzere;

$\dots, n, n+1, n+2, \dots$ Ardışık tam sayılardır.

$\dots, 2n, 2n+2, 2n+4, \dots$ Ardışık çift sayılardır.

$\dots, 2n-1, 2n+1, 2n+3, \dots$ Ardışık tek sayılardır.

$\dots, 5n, 5n+5, 5n+10, \dots$ 5'in katı ardışık sayılardır.

UYARI

- * Ardışık tam sayılar arasındaki fark büyüklük belirtilmedikçe ± 1 'dir.
- * Ardışık çift veya tek sayılar arasındaki fark büyüklük belirtilmedikçe ± 2 'dir.

ÇÖZ

$(2n-4)$ ile $(n-6)$ ardışık tam sayılardır.

Buna göre n 'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

ÖĞREN

Sayılar arasında büyüklük belirtilmediği için $2n-4 > n-6$ veya $n-6 > 2n-4$ 'tür. Ardışık tam sayılar arasındaki fark ± 1 olduğundan

$$\begin{array}{ll} 2n-4 > n-6 & n-6 > 2n-4 \\ 2n-4 = n-6+1 & n-6 = 2n-4+1 \\ n=-1 & n=-3 \end{array}$$

bulunur. n 'in alabileceği değerler toplamı da $-1+(-3)=-4$ 'tür.

**NOT**

Ardışık sayılarda terim sayısı tek ise ortanca sayı bulmak için,

$$\text{Ortanca Sayı} = \frac{\text{Sayıların Toplamı}}{\text{Sayı Adedi}}$$

formülü kullanılır.

ÇÖZ

Ardışık 5 tam sayının toplamı 80'dir.

Buna göre bu sayılardan en büyüğü kaçtır?

ÖĞREN

Önce ortanca sayı bulunur.

$$\text{Ortanca Sayı} = \frac{80}{5} = 16 \text{ 'dir.}$$

5 tane sayı olduğundan ortanca sayının sağına 2 sayı ve soluna 2 sayı yazılır.

Ardışık tam sayılar birer birer artıp azalacağından

1. sayı	2. sayı	Ortanca Sayı
14	15	16

4. sayı	5. sayı	olur. O hâl-
17	18	

de bu sayılardan en büyüğü 18'dir.

ÇÖZ

Ardışık 6 tam sayının toplamı 135'tir. Buna göre bu sayılardan en büyüğü kaçtır?

ÖĞREN

$$\text{Ortanca sayı} = \frac{135}{6} = 22,5 \text{ 'tir.}$$

Sayılar tam sayı olacağından ve çıkan ortanca sayı virgüllü olduğundan sayılara dahil edilmez. O hâlde

1. sayı	2. sayı	3. sayı	Ortanca Sayı
20	21	22	22,5
4. sayı	5. sayı	6. sayı	'dir.
23	24	25	

En büyük sayı 25'tir.

ÇÖZ

Ardışık 3 tek tam sayının toplamı en küçük sayının 4 katından 17 eksik olduğuna göre ortanca sayı kaçtır?

ÖĞREN

Ardışık tek sayılar ikiye ikiye artar. En küçük sayı x seçilirse
 $\frac{1. \text{sayı}}{x} \quad \frac{2. \text{sayı}}{x+2} \quad \frac{3. \text{sayı}}{x+4}$ olur.

Ardışık 3 tek tam sayının toplamı en küçük sayının 4 katından 17 eksik olduğuna göre,
 $x + x + 2 + x + 4 = 4 \cdot x - 17$
 $3x + 6 = 4x - 17$
 $x = 23$ bulunur.

O hâlde ortanca sayı yani 2. sayı $x + 2 = 23 + 2 = 25$ 'tir.

Ardışık Sayıların Sonlu Toplamı

* 1'den n 'e kadar olan ardışık tam sayıların toplamı,
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

* 2'den $2n$ 'e kadar olan ardışık çift tam sayıların toplamı,
 $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

* 1'den $2n-1$ 'e kadar olan ardışık tek tam sayıların toplamı,
 $1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$
 formülleri ile bulunur.

Ardışık sayıların toplamı bulunurken genel olarak,

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim} + 1}{\text{Artış miktarı}}$$

$$\text{Terimler Toplamı} = \frac{\text{Son Terim} + \text{İlk Terim}}{2} \cdot \text{Terim Sayısı}$$

formülleri kullanılır.

ÇÖZ

n tek sayı olmak üzere n tane ardışık pozitif tam sayının toplamı, ortadaki sayı ile n çarpılarak bulunur. Bu kural ardışık çift sayılar için de geçerlidir.

$$\underbrace{7+8+9}_{n=3} = 8 \cdot 3 = 24$$

$$\underbrace{12+14+16+18+20}_{n=5} = 16 \cdot 5 = 80$$

Buna göre $230 + 232 + \dots + 266$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$\begin{aligned} \text{Terim Sayısı} \times \text{Ortanca Sayı} \\ \text{Terim Sayısı} &= \frac{266 - 230}{2} + 1 \\ &= \frac{36}{2} + 1 = 19 \text{ 'dur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ortanca Sayı} &= \frac{266 + 230}{2} = \frac{496}{2} \\ &= 248 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Toplamın sonucu;

$$\begin{aligned} \underbrace{230 + 232 + \dots + 248 + \dots + 266}_{n=19} \\ = 248 \times 19 \text{ 'dur.} \end{aligned}$$

Tek ve Çift Sayılar

Çift Sayı : 2 ile tam bölünebilen 0, 18, 126 gibi sayılardır.

Tek Sayı : 2 ile tam bölünemeyen 5, 7, 129 gibi sayılardır.



NOT

Teklik ve çiftlik durumuna sadece tam sayılarda bakılır. Örneğin; $\frac{2}{5}$ ifadesi rasyonel bir sayı olduğu için tek sayı ya da çift sayı diyemeyiz.

$\mathcal{C}$ = Çift Sayı T = Tek Sayı

$$\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

$$T + T = \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C} + T = T$$

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

$$T \cdot T = T$$

$$\mathcal{C} \cdot T = \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}^n = \mathcal{C} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

$$T^n = T \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

Üstteki ifadeler daima doğrudur.

UYARI

Kuvveti pozitif tam sayı olan ifadelerin kuvvetini yok sayarak işlem yapmak bizi doğruya kolay çözüme götürür.

Örneğin;

$$a^{1965} + 2a^{1006} + 3a^{1463} = a + 2a + 3a = 6a$$

olur.

6 çift sayı olduğundan sonuç çifttir.

Örneğin; $5^{45} + 6^{32} = 5 + 6 = 11$ yani tek sayıdır.

ÇÖZ

x ve y birer tam sayı ve $x+y$ tek sayı olmak üzere,

I. $x-y$ tek sayıdır.

II. $x \cdot y$ tek sayıdır.

III. $x^3 + y$ tek sayıdır.

İfadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

ÖĞREN

$$x + y = T$$

$$1. \text{ durum} \rightarrow \mathcal{C} \quad T = T$$

$$2. \text{ durum} \rightarrow T \quad \mathcal{C} = T$$

I. öncül için; $\mathcal{C} - T = T - \mathcal{C} = \text{Tek}$
her zaman doğru

II. öncül için; x ve y 'den herhangi biri iki durumda da çift olacağından sonuç her zaman çifttir. (II. öncül yanlış)

III. 1. durum için;

$$\mathcal{C}^T + T = T$$

2. durum için;

$$T^{\mathcal{C}} + \mathcal{C} = T$$

III. öncülde her zaman doğrudur.

Buna göre; I ve III her zaman doğrudur.

Çöz

x, y ve z birer tam sayıdır.
 $x+y = \text{çift}$, $x+y+z = \text{tek}$,
 $y+z = \text{tek}$ olduğuna göre,

- I. $x \cdot y + z$
- II. $x \cdot z + y + 1$
- III. $x + y \cdot z$

İfadelerinden hangileri tek sayıdır?

ÖĞREN

$$\begin{array}{ccc} x+y = \text{Çift} & & x+y+z = \text{Tek} \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \text{Ç} \text{ Ç} & & \text{Ç} \text{ T} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y+z = \text{Tek} & & \\ \downarrow \downarrow & & \\ \text{Ç} \text{ T} & & \end{array}$$

Yukarıdaki gibi sayıların teklik çiftlik durumuna baktık.

I. öncülde;

$$\text{Ç} \cdot \text{Ç} + \text{T} = \text{Tek}$$

II. öncülde;

$$\frac{\text{Ç} \cdot \text{T}}{\text{Ç}} + \frac{\text{Ç} + 1}{\text{T}} = \text{Ç} + \text{T} = \text{T}$$

III. öncülde;

$$\text{Ç} + \text{Ç} \cdot \text{T} = \text{Ç}$$

Yukarıda görüldüğü gibi I ve II. öncül tek, üçüncü öncül çifttir.

Çöz

x, y ve z tam sayılardır.

$$\frac{x \cdot y + 1}{2} = z$$

olduğuna göre, x, y ve z için

- I. z tekdir.
- II. x ve y çifttir.
- III. x ve y tekdir.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

ÖĞREN

$$\begin{array}{ccc} \frac{x \cdot y + 1}{2} & = & \frac{2 \cdot z}{2} \\ \text{T} \quad \text{T} & & \text{Çift} \\ \text{Çift} & & \end{array}$$

z hakkında yorum yapamayız.

Çünkü her durumda eşitliğin sağ tarafı çift sayıdır.

$$\begin{array}{ccc} x \cdot y + 1 & \Rightarrow & \text{Çift ise} \\ \downarrow \downarrow & & \\ \text{T} \cdot \text{T} & & \end{array}$$

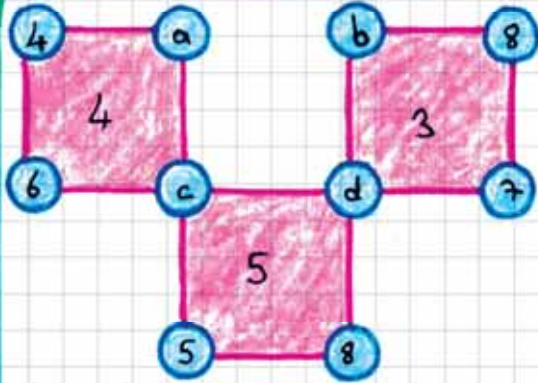
x ve y tek sayı olmalı.

Yalnız III ifadesi doğrudur.

"Hayatınızda
 kazanmadan önce,
 zihninizde
 kazanmak zorundasınız."

Addison

Çöz



Köşelerdeki çemberlerde tam sayıların yazıldığı olduğu üç tane kare-den oluşan bir düzenek verilmiştir. Bu düzenekte her bir karenin için de yazılı olan sayının karesi bu karenin köşelerinde bulunan çemberlerde yazılı olan sayıların toplamına eşittir.

Buna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

Öğren

$$a+c+10=16$$

$$c+d+13=25$$

$$b+d+16=9$$

ifadelerini düzenlersek

$$a+c=6$$

$$-1/c+d=12$$

$$+ \quad b+d=-6$$

$$a+b=-12 \text{ bulunur.}$$

Çöz

	x	y	z
x	16		8
y		a	6
z	b		

x, y ve z birbirinden farklı pozitif tam sayılar olmak üzere yukarıdaki çarpma tablosuna göre, $a+b$ toplamını bulunuz.

Öğren

$$x \cdot x = 16 \Rightarrow x^2 = 16$$

$$x=4 \text{ veya } x=-4$$

Pozitif tam sayı dediği için;

$$x=4 \text{ olur.}$$

$$x \cdot z = 8 \Rightarrow 4 \cdot z = 8$$

$$\boxed{z=2}$$

$$y \cdot z = 6 \Rightarrow y \cdot 2 = 6$$

$$\boxed{y=3}$$

$$a = y^2 \Rightarrow a = 3^2$$

$$= 9$$

$$b = z \cdot x \Rightarrow b = 2 \cdot 4$$

$$= 8$$

$$a+b = 9+8$$

$$= 17 \text{ bulunur.}$$

1. a, b, c sıfırdan ve birbirinden farklı birer rakam olmak üzere, $3a - 5b + 7c$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?
- A) 78
B) 80
C) 81
D) 82
E) 84

2. $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\frac{a-3}{b+1} = 6$

ise aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

- A) a tek sayıdır.
B) b çift sayıdır.
C) a çift, b tek sayıdır.
D) a tek, b çift sayıdır.
E) a veya b çift sayıdır.

3. $x + y = 9$

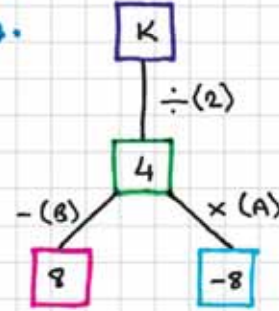
$$y + z = 11$$

$$z + w = 15 \text{ olduğuna göre,}$$

$x + w$ toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 13
D) 15 E) 17

4.



Yukarıdaki işlem tablosunun bazı kısımlarında çarpma, bölme ve çıkarma işlemi verilmiştir.

Buna göre, $K + A - B$ ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 10 E) 12

Cevap Performansı

1	2	3	4
D	A	C	D
E	B	D	A
A	C	E	B
B	D	A	C
C	E	B	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, anlamlı çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

D, A, C, D

5. a ve b gerçel sayıları için $\frac{a}{b} = 4$ olduğuna göre,

- I. a sıfır olamaz
 II. a ve b 'nin işaretleri aynıdır.
 III. a tam sayıysa b 'de tam sayıdır.
 ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

- A) Yalnız I
 B) Yalnız II
 C) I ve II
 D) I ve III
 E) I, II ve III

6. $1 - 2 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 \dots + 55 + 56$ ifadesinde bazı sayıların önüne (+), bazı sayıların önüne (-) yazılarak toplanıyor. Çıkan sonuç 350 olduğuna göre işareti (+) olan sayıların toplamı kaçtır?

- A) 300 B) 376 C) 415
 D) 448 E) 512

7. $\triangle x = 2x + 4$ olarak veriliyor.

Buna göre, $\triangle y = 3y - 8$ ise y kaçtır?

- A) -4
 B) 0
 C) 4
 D) 6
 E) 8

8. x, y ve z doğal sayılar ve $x + 3y = 2z + 4$ olduğuna göre,

- I. x, y
 II. $x + y$
 III. $x + z$

Yukarıdakilerden hangisi her zaman çifttir?

- A) Yalnız I
 B) Yalnız II
 C) I ve III
 D) I ve II
 E) I, II ve III

Soru

Cevap Performansı

5	6	7	8
C	D	E	B
D	E	A	C
E	A	B	D
A	B	C	E
B	C	D	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
 C, D, E, B

9. Birbirinden farklı, üç basamaklı üç doğal sayının toplamı A'dır. Buna göre A kaç farklı değer alabilir?

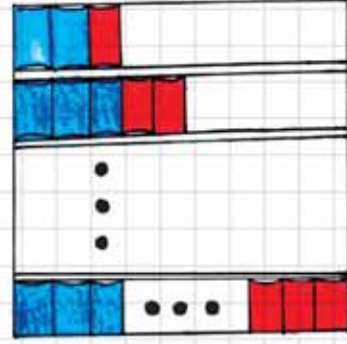
- A) 1800
- B) 2350
- C) 2496
- D) 2692
- E) 2805

10. x ve y sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere,
 $x \cdot y = \frac{x}{y} = x + 4$

olduğuna göre, $x + y$ çarpımı kaçtır?

- A) -2
- B) 0
- C) 2
- D) 6
- E) 8

11.



Yukarıda verilen yeterince büyük bir kitaplıkta en üst rafında 2 mavi, 1 kırmızı kapaklı kitap, bir altında 3 mavi, 2 kırmızı kapaklı kitap şeklinde yerleştirilerek en alt rafında aynı kurala göre kitap yerleştirildiğinde en alt rafta toplam 181 kitap oluyor.

Buna göre, bu kitaplıkta mavi kitap sayısı, kırmızı kitap sayısından kaç fazladır?

- A) 90 B) 100 C) 115
- D) 120 E) 136

Cevap Performansı

9	10	11
D	C	A
E	D	B
A	E	C
B	A	D
C	B	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

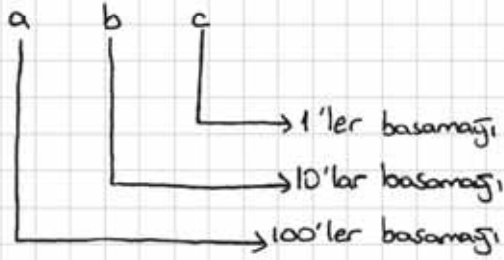
Doğru Cevaplar

D, C, A

SAYI BASAMAKLARI

* Bir sayıyı oluşturan rakamların her biri bu sayının bir basamağını oluşturur.

a, b, c birer rakam olsun ve abc üç basamaklı bir doğal sayı olsun.



Bu açılamdan faydalanarak;
 $abc = 100a + 10b + c$ biçiminde yazılabilir.

Gözümlemede Toplama

Gözümlemede toplama işlemi yapılırken sihirli sayılarımız 11 ve 111'dir. Çünkü iki basamaklı ab ve ba sayıları toplanırsa

$$ab + ba = 11 \cdot (a + b)$$

Üç basamaklı abc, bca, cab sayıları toplanırsa

$$abc + bca + cab = 111 \cdot (a + b + c)$$



Çöz

İki basamaklı ab sayısı rakamları yer değiştirilince elde edilen iki basamaklı ba sayısı ile toplandığında sonuç 165 oluyor.

Buna göre a+b toplamı kaçtır?

Öğren

ab sayısının ba sayısı ile toplamı 165 ise denklem

$$ab + ba = 165 \text{ 'dır.}$$

Sayılar gözümlemlenirse

$$10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a = 165$$

$$11a + 11b = 165$$

$$11 \cdot (a + b) = 165$$

$$a + b = 15 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

Üç basamaklı ABC ve iki basamaklı AB sayıları arasındaki fark 435'tir. Buna göre $A+B+C$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$ABC - AB = 435$$

$$100A + 10B + C - (10A + B) = 435$$

$$90A + 9B + C = 435$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 8 & 3 \end{array}$$

$$A+B+C = 4+8+3 = 15 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$$\begin{array}{r} ABD \\ - BBC \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} AC \\ - BD \\ \hline ? \end{array}$$

Solda verilen çıkarma işlemine göre sağdaki çıkarma işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$ABD - BBC = 294$$

$$100A + 10B + D - (100B + 10B + C) = 294$$

$$100A - 100B + D - C = 294$$

$$100 \underbrace{(A-B)}_3 + \underbrace{(D-C)}_{-6} = 294$$

$$AC - BD = ?$$

$$10A + C - (10B + D) = ?$$

$$10(A-B) + (C-D) = 10 \cdot 3 + 6 = 36$$

ÇÖZ

ABC, BCA ve CAB üç basamaklı sayılar olmak üzere;

$$ABC + BCA + CAB = 2664$$

olduğuna göre $A+B+C$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

Eğer toplamın sonucunda ortada birden fazla sayı varsa, ortadaki tüm sayılar kapatılarak baştaki rakamların toplamı bulunur.

$$\begin{array}{r} ABC \\ BCA \\ + CAB \\ \hline 2664 \end{array}$$

$$A+B+C = 24 \text{ bulunur.}$$

**NOT**

AB iki basamaklı sayısı rakamları toplamının x katı ise BA iki basamaklı sayısı rakamları toplamının $(11-x)$ katıdır. Yani katlar toplamı birbirini 11'e tamamlar.

Çöz

İki basamaklı ab sayısı rakamları toplamının 7 katıdır. Buna göre ba iki basamaklı sayısı rakamları toplamının kaç katıdır?

Öğren

ab iki basamaklı sayısı rakamları toplamının 7 katı olduğuna göre,

$$ab = 7 \cdot (a+b)$$

$$10a+b = 7a+7b$$

$$3a = 6b$$

$$a = 2b$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \quad 1$$

$b=1$ alınırsa $a=2$ olur. Bu durumda ba sayısı 12 olur. O hâlde ba sayısı rakamları toplamının

$$12 = k \cdot (1+2)$$

$$12 = 3k$$

$$k = 4 \text{ katıdır.}$$

Çöz

A, B ve C sıfırdan farklı rakamlardır.

$$A = B+1$$

$$B = C+2$$

Şartlarını sağlayan kaç farklı üç basamaklı ABC sayısı yazılabilir?

Öğren

A, B ve C sayılarına değerler verilir. Ancak verilecek değerler sıfırdan farklı ve rakam olmak zorundadır.

$$A = B+1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$4 \quad 3$$

$$5 \quad 4$$

$$6 \quad 5$$

$$7 \quad 6$$

$$8 \quad 7$$

$$9 \quad 8$$

$$B = C+2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 1$$

$$4 \quad 2$$

$$5 \quad 3$$

$$6 \quad 4$$

$$7 \quad 5$$

$$8 \quad 6$$

olmak üzere yazılabilecek üç basamaklı ABC sayıları 6 tane dir.

" Umutsuz durumlar yoktur,
Umutsuz insanlar vardır.
Ben hiçbir zaman umudumu yitirmedim. "

Mustafa Kemal Atatürk

Çöz

İki basamaklı ab sayısı rakamları yer değiştirilince elde edilen iki basamaklı ba sayısından 54 büyük olduğuna göre bu koşulu sağlayan kaç tane ab sayısı yazılabilir?

Öğren

İki basamaklı ab sayısı iki basamaklı ba sayısından 54 büyük olduğuna göre,

$$ab = ba + 54$$

$$ab - ba = 54$$

$$9.(a-b) = 54$$

$$a-b = 6 \text{ 'dır.}$$

Bu koşulu sağlayan iki basamaklı ab sayılarını bulmak için a ve b 'ye değerler verilir. Unutulmamalıdır ki a ve b sadece rakam olabilir ve başa gelen rakamlar sıfır olamaz.

$$a-b=6$$

$$\begin{array}{r} 7 \ 1 \\ 8 \ 2 \\ 9 \ 3 \end{array}$$

Bu durumda ab sayısı 71, 82, 93 olmak üzere 3 farklı değer alabilir.

Çöz

$$\begin{array}{r} abc \\ \times 24 \\ \hline 1144 \\ + \dots \\ \hline KLM \end{array}$$

Yukarıdaki çarpma işlemine göre $K+L+M$ toplamı kaçtır?

Öğren

Çarpma işleminin 1. satırında 4 ile abc sayısının çarpımı, 2. satırında 2 ile abc sayısının çarpımı yazılacaktır.

$$\begin{array}{r} abc \\ \times 24 \\ \hline 1144 \rightarrow 4 \cdot abc \\ + \dots \rightarrow 2 \cdot abc \\ \hline KLM \end{array}$$

Bu durumda,

$$4 \cdot abc = 1144$$

$$abc = 286 \text{ bulunur.}$$

O, hâlde çarpma işleminin sonucu;

$$\begin{array}{r} 286 \\ \times 24 \\ \hline 1144 \\ + 572 \\ \hline 6864 \end{array}$$

bulunur. Buna göre;

$$K+L+M = 6+8+4 = 18 \text{ olur.}$$

Göz

Rakamları farklı ve birbirinden farklı iki basamaklı 5 doğal sayının toplamı 125'tir.

Buna göre bu sayılardan en büyüğü en çok kaçtır?

Öğren

5 doğal sayıdan bir tanesi en büyük ve en çok olacağından kalan 4 doğal sayı verilen şartlara uygun en küçük sayılar seçilmelidir. Sayıların rakamları farklı, birbirinden farklı ve 2 basamaklı olması istendiğinden sayılar

1. sayı	2. sayı	3. sayı
10	12	13
4. sayı	5. sayı	olur.
14	x	

Sayıların toplamı 125 olduğuna göre,

$$10 + 12 + 13 + 14 + x = 125$$

$$49 + x = 125$$

$$x = 76 \text{ bulunur.}$$

Göz

Ali, Cengiz ve Ömer arasında şöyle bir konuşma geçiyor.

* Ali üç basamaklı bir sayıyı aklında tutuyor. Tuttuğu sayıyı Cengiz'e söylüyor.

* Cengiz ise Ali'nin söylediği sayının onlar basamağını 2 azaltıp, Ömer'e söylüyor.

* Ömer ile Cengiz'in söylediği sayının yüzler basamağını 2 artırıp sonunda başka bir sayı elde ediyor. Bu üçünün elde ettikleri sayıların toplamı 1780 olduğuna göre Ali'nin aklında tuttuğu sayı kaçtır?

Öğren

Ali'nin aklında tuttuğu sayı abc olsun.

Cengiz bu sayının onlar basamağını 2 azaltırsa bu sayının değeri $abc - 20$ olur.

Ömer ise bu sayının yüzler basamağını 2 artırırsa

sayının değeri $abc - 20 + 200$ olur. Bu üçünün toplamı;

$$abc + abc - 20 + abc + 180 = 1780$$

$$3(abc) = 1620$$

$$abc = 540 //$$

ÇÖZ



Adil usta yukarıdaki hesap makinasına müşterisi Hasan Bey'in aldığı ürünlerin toplam fiyatı, rakamları farklı 3 basamaklı olan bir sayıyı yazıyor. Daha sonra yanlış yazdığını fark edince $\boxed{-}$ tuşuna basıp ilk yazdığı sayının yüzler ve onlar basamağını değiştirip başka bir sayı yazıp $\boxed{=}$ tuşuna basıyor ve ekranda 540 sayısı görünüyor. Buna göre, Adil ustanın ilk yazdığı sayının rakamları toplamı en fazla kaçtır?

ÖĞREN

Adil ustanın yazdığı sayı 3 basamaklı ise abc olsun.
Değiştirdiği sayı bac olur.

$$abc - bac = 540$$

$$100a + 10b + c - (100b + 10a + c) = 540$$

$$90(a - b) = 540$$

$$a - b = 6$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 1 \\ 8 \quad 2 \\ 9 \quad 3 \end{array}$$

$a=9$, $b=3$ rakamları farklı dediği için $c=8$ seçersek,

$$938 - 398 = 540$$

$$9 + 3 + 8 = 20 \text{ bulunur.}$$

1. Üç basamaklı bir doğal sayının sağına 3 yazılarak dört basamaklı A sayısı, aynı sayının soluna 4 yazılarak dört basamaklı B sayısı elde edilmiştir. $A+B=11967$ olduğuna göre, üç basamaklı sayının rakamları toplamı kaçtır?
- A) 9 B) 11 C) 13
D) 15 E) 17

2. İki basamaklı AB doğal sayısı, iki basamaklı BA doğal sayısından rakamlarının toplamı kadar azdır. Buna göre, AB sayısının rakamları toplamı kaçtır?
- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

3. A ve B sıfırdan farklı rakamlar olmak üzere,

$$\begin{array}{r} AB8 \\ + AB \\ \hline 26A \end{array}$$

olduğuna göre, $A+B$ toplamı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

$$\begin{array}{r} ABC \\ - CBD \\ \hline 199 \end{array} \quad \begin{array}{r} AC \\ + CD \\ \hline ? \end{array}$$

Solda verilen çıkarma işlemine göre, sağdaki toplama işleminin sonucu kaçtır?

- A) 65 B) 70 C) 75
D) 80 E) 85

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	C	E	A
D	E	A	B
E	A	B	C
A	B	C	D
B	D	D	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
C, C, E, A

BÖLME - BÖLÜNEBİLME

Bölme

A, B, C, K birer doğal sayı, $B \neq 0$ ve $K \geq 0$ olmak üzere, A sayısının B ile bölünmesinden bölüm C ve kalanda K olmak üzere,

$$\begin{array}{r} A \overline{) B} \\ - \\ \hline K \end{array}$$

A: Bölünen

B: Bölün

C: Bölüm

K: Kalan

şeklinde ifade edilir.

✗ Kalan daima bölenden küçük ve sıfırdan büyük veya eşittir.

$0 \leq K < B$ 'dir. (Kalan asla negatif olmaz)

✗ $A = B \cdot C + K$ (Bölünen = Bölün. Bölüm + Kalan)

✗ $K = 0$ ise "A sayısı B sayısına tam olarak bölünür" denir.

ÇÖZ

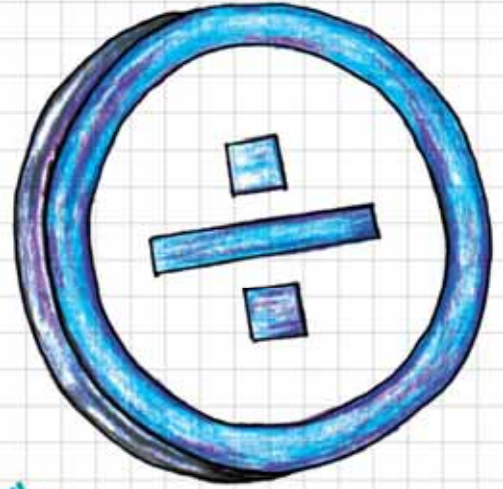
$$\begin{array}{r} ABABAB7 \overline{) AB} \\ - \\ \hline y \end{array}$$

olduğuna göre $x+y$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$\begin{array}{r} ABABAB7 \overline{) AB} \\ - AB \\ \hline 00AB \\ - AB \\ \hline 00AB \\ - AB \\ \hline 007 \end{array}$$

$$x+y = 101010 + 7 = 101017$$



ÇÖZ

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ - 19 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} b \overline{) c} \\ - 3 \\ \hline \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre a'nın en küçük değeri kaçtır?

ÖĞREN

$a = 3b + 19$ ve $b = 4c + 3$ 'tür.

Buna göre $c > 3$ olduğundan ve en küçük değer sorulduğundan

$c = 4$ alınır.

$$b = 4c + 3$$

$$b = 4 \cdot 4 + 3$$

$b = 19$ elde edilir. Fakat 1. bölme işlemine göre $b > 19$

olacağından $c = 4$ olamaz.

Bu durumda 4'ten sonra gelen en küçük sayı yani 5 alınır.

$$b = 4c + 3$$

$$b = 4 \cdot 5 + 3$$

$$b = 23$$

$$a = 3b + 19$$

$$a = 3 \cdot 23 + 19$$

$$a = 88 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

x ve y pozitif tam sayılardır.

$$\begin{array}{r} x+8 \overline{) 17} \\ - y \\ \hline y^2+1 \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre x 'in alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

ÖĞREN

x ifadesinin en büyük değeri alabilmesi için kalan $<$ bölen ilişkisinden yararlanılır.

$$y^2+1 < 17$$

$$y^2 < 16$$

$$y < 4$$

olduğundan y 'nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 3'tür. Bu değer bölme işleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{array}{r} x+8 \overline{) 17} \\ - y \rightarrow 3 \\ \hline y^2+1 \\ \downarrow \\ 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} x+8 \overline{) 17} \\ - 3 \\ \hline 10 \end{array}$$

elde edilir. Buradan da

$$x+8 = 3 \cdot 17 + 10$$

$$x+8 = 61$$

$$x = 53 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

Toplamı 180 olan iki sayıdan büyük küçüğe bölündüğünde bölüm 3 ve kalan 20 olduğuna göre büyük sayı kaçtır?

ÖĞREN

Büyük sayı $\rightarrow x$

Küçük sayı $\rightarrow y$ olsun.

Sayıların toplamı 180 olduğundan;

$$x+y=180 \text{ olur.}$$

Büyük sayı küçük sayıya bölündüğünde bölüm 3 kalan 20 olduğundan;

$$\begin{array}{r} x \overline{) y} \\ - 3 \\ \hline 20 \end{array} \text{ olur.}$$

Buradan da $x=3y+20$ olur.

$$x+y=180$$

$$\downarrow$$

$$3y+20+y=180$$

$$4y=160$$

$$y=40 \text{ bulunur.}$$

Büyük sayı yani x sorulduğundan;

$$x+y=180$$

$$\downarrow$$

$$x+40=180$$

$$x=140 \text{ bulunur.}$$

Bölünebilme Kuralları

* 0 ile Bölünebilme:

• Bir sayının sıfıra bölümü tanımsızdır.

$$\frac{\text{sayı}}{0} = \text{tanımsız.}$$

• Sıfırın sıfıra bölümü belirsizdir.

$$\frac{0}{0} = \text{belirsiz.}$$

• Sıfırın bir sayıya bölümü sıfırdır.

$$\frac{0}{\text{sayı}} = 0$$

* 2 ile Bölünebilme:

Birler basamağı 0, 2, 4, 6, 8 olan tam sayılar "2" ile tam bölünür.

* 3 ile Bölünebilme:

Rakamları toplamı 3'ün katı olan sayılar "3" ile tam bölünür.

* 4 ile Bölünebilme:

Son iki basamağı 00 ya da 4'ün katı olan sayılar "4" ile tam bölünür.

* 5 ile Bölünebilme:

Birler basamağı 0 ya da 5 olan sayılar "5" ile tam bölünür.

* 7 ile Bölünebilme:

Sağdan sola doğru 3'er 3'er gruplama yapılır. Sağdan sola doğru 1 3 2 ile çarpılır.

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c & d & e & f & g & h \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{array}$$

$$3a + b - [2c + 3d + c] + [2f + 3g + h] = 7k$$

$k \in \mathbb{Z}$ şartını sağlayan bütün sayılar "7" ile tam bölünür.

* 8 ile Bölünebilme:

Son üç basamağı 000 ya da 8'in katı olan sayılar "8" ile tam bölünür.

* 9 ile Bölünebilme:

Rakamları toplamı 9'un katı olan sayılar "9" ile tam bölünür.

* 10 ile Bölünebilme:

Birler basamağı 0 olan sayılar "10" ile tam bölünür.

* 11 ile Bölünebilme:

Bir sayının 11 ile tam bölünebilmesi için birler basamağının işareti (+), onlar basamağının işareti (-) alınıp bu şekilde devam edilerek sayının basamaklarındaki rakamlar toplanır. Çıkan sonuç "11" in katı ise veya "0" ise sayı "11" ile tam bölünür.

✓ Aralarında asal iki veya daha fazla sayının her birine tam bölünebilen bir doğal sayı bu sayıların çarpımında tam bölünür.

* 2 ve 3 ile bölünebilen sayılar "6" ile tam bölünür.

* 3 ve 4 ile tam bölünebilen sayılar "12" ile tam bölünür.

* 3 ve 5 ile tam bölünebilen sayılar "15" ile tam bölünür.

* 4 ve 5 ile bölünebilen sayılar "20" ile tam bölünür.

* 2 ve 11 ile bölünebilen sayılar "22" ile tam bölünür.

* 3 ve 10 ile bölünebilen sayılar "30" ile tam bölünür.

* 5 ve 9 ile bölünebilen sayılar "45" ile tam bölünür.

"Önce

FARKI yaratırsın,

Sonra da

FARK yaratırsın."

Tayfun Topaloğlu

Çöz

$$x = 2174$$

$$y = 8124$$

olduğuna göre $2x + y^2$ toplamının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Öğren

$x = 2174$ sayısının 9 ile bölümünden kalan;

$$2 + 1 + 7 + 4 = 14$$

$$\begin{array}{r} 14 \ 9 \\ - 9 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

5'tir.

$y = 8124$ sayısının 9 ile bölümünden kalan;

$$8 + 1 + 2 + 4 = 15$$

$$\begin{array}{r} 15 \ 9 \\ - 9 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

6'dır.

O hâlde; $x = 5$ ve $y = 6$ alınarak çözüm yapılır.

Buna göre;

$$\begin{aligned} 2x + y^2 &= 2 \cdot 5 + 6^2 \\ &= 10 + 36 \\ &= 46 \text{ olur.} \end{aligned}$$

46 sayısının 9 ile bölümünden kalan;

$$\begin{array}{r} 46 \ 9 \\ - 45 \quad 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

Kalan = 1'dir.

Çöz

$6x532$ beş basamaklı sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre x 'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Öğren

$$6x532 \rightarrow 6+x+5+3+2 = 3k+2$$

Kalan 2 olduğu için

$$16+x = 3k+2$$

$$14+x = 3k$$

$$x = \{1, 4, 7\}$$

$$14+1 = 15$$

$$14+4 = 18$$

$$14+7 = 21$$

3 farklı değer alır.

0 hâlde x değerlerinin toplamı,
 $1+4+7 = 12$ bulunur.

Çöz

a ve b birer pozitif tam sayıdır. $(6a+8) \cdot (6b+14)$ çarpımının 12 ile bölümünden kalan kaçtır?

Öğren

Çarpım paranteze dağıtılsa;
 $(6a+8) \cdot (6b+14) = 36 \cdot a \cdot b + 84 \cdot a + 48 \cdot b + 112$ ifadesi elde edilir.

Bu ifade de $36 \cdot a \cdot b$, $84 \cdot a$, $48 \cdot b$ ifadeleri 12'nin bir katı olduğundan kalan 0'dır. 0 hâlde çarpımın 12 ile bölümünden;

$$\begin{array}{r} 112 \overline{) 12} \\ -108 \\ \hline 4 \end{array} \rightarrow \text{Kalan}$$

Çöz

Rakamları birbirinden farklı $a4b$ üç basamaklı sayısı 4 ile tam bölünebilmekte ve $b4a$ üç basamaklı sayısı da 5 ile tam bölünebilmektedir. Buna göre üç basamaklı $ab4$ sayısının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

Öğren

Üç basamaklı $a4b$ sayısı 4 ile tam bölünebildiğine göre b sayısı 0, 4 ve 8 olabilir. Ancak 0 olamaz.

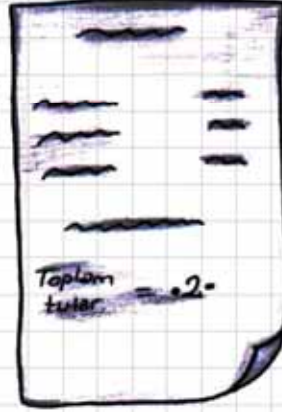
Çünkü b sayısı başa gelmiştir. 4 değeri de olamaz çünkü rakamlar birbirinden farklı olmalıdır. 0 hâlde, $b=8$ olur.

$b4a$ sayısı 5 ile tam bölünebildiğine göre a sayısı 0 veya 5 olabilir. Ancak 0 olamaz. Çünkü a sayısı başa gelmiştir. Bu durumda $a=5$ 'tir. $ab4$ sayısının 6 ile bölümünden kalanı bulmak için önce bulunan a ve b değeri yerine yazılır. Bu durumda sayı 584'dür. Bu sayının 6 ile bölümünden;

$$\begin{array}{r} 584 \overline{) 6} \\ -582 \\ \hline 2 \end{array} \quad \text{Kalan} = 2 \text{ 'dir.}$$

ÇÖZ

Yaz alışverişi için bir mağazaya giden Eymen kendisine iki tişört, bir pantolon, bir ayakkabı ve iki gömlek almıştır. Eymen kasaya geçerek aldığı ürünlerin parasını vereceksen kasier toplam tutarın üç basamaklı ve onikinin katı olan bir sayı söylemiştir.



Eymen parayı ödedikten sonra fişi aldığında toplam tutarın **•2•** şeklinde yüzler ve birler basamağı silik çıkan bir sayı görüyor. Buna göre silik çıkan iki rakamın toplamı en fazla kaçtır?

ÖĞREN

Toplam tutar •2• şeklinde ise ve bu sayı 12'nin katı ise bu sayı 12 ile tam bölünür olmalıdır. Bu yüzden bu sayı hem 3'e hemde 4'e tam bölünür. 4 ile bölünebilme kuralında son iki rakamına bakıyorduk. Bu sayılar,

• 20 , • 24 , • 28 (Bu sayılar 3'e de bölünür)
 ↓ ↓ ↓
 1 3 2
 4 6 5
 7 9 8

Silik çıkan iki rakamın toplamı en fazla **828**

$$8+8=16 \text{ olur.}$$

1. A sayısının B ile bölümünden elde edilen bölüm 7, kalan 3'tür. B sayısının 4 ile bölümünden elde edilen bölüm C, kalan 2'dir.

Buna göre, A sayısının 14 ile bölümünden elde edilen bölüm aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2C+1$ B) 0 C) $2C+2$
D) 3 E) $2C+3$

2. A bir doğal sayıdır.

$$\begin{array}{r} A \overline{) 38} \\ \underline{- 4} \\ x^2 \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işlemine göre, A'nın alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 187 B) 188 C) 189
D) 190 E) 191

3. Dört basamaklı rakamları farklı $2a3b$ sayısının 4 ile bölümünden kalan 3, 11 ile bölümünden kalan 5'tir.

Buna göre a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 8 B) 10 C) 11
D) 14 E) 15

4. Yüzler basamağı 6 olan ve 9 ile tam bölünebilen üç basamaklı abc sayıları için $a > b > c$ koşulu vardır.

Buna göre, bu koşula uygun kaç tane abc sayısı yazılabilir?

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Cevap Performansı

1	2	3	4
A	C	A	B
B	D	C	C
C	E	B	D
D	A	D	E
E	B	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile bileştir.

Doğru Cevaplar
A, C, A, B

ASAL ÇARPANLARA AYIRMA VE FAKTÖRİYEL

- * 1 ve kendisinden başka hiçbir pozitif tam sayıya bölünemeyen 1'den büyük doğal sayılara asal sayı denir.

ÖRNEK

2, 3, 5, 7, 11, 13,
17, 19, 23, 29...

gibi sayılar birer
asal sayıdır.



UYARI

- # En küçük asal sayı 2'dir.
- # Negatif asal sayı yoktur.
- # 2 hariç tüm asal sayılar tektir.
- # 1'den başka ortak böleni olmayan iki veya daha fazla tam sayıya aralarında asal sayı denir.

Bir Sayma Sayısının Bölenlerinin Sayısı

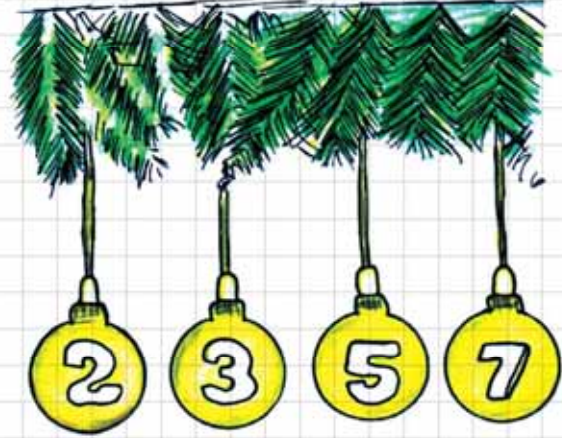
a, b ve c birbirinden farklı asal sayılar; x, y ve z doğal sayılar olmak üzere bir A doğal sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali, $A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ olsun.

Pozitif Bölen Sayısı:

$$(x+1)(y+1)(z+1)$$

Negatif Bölen Sayısı:

$$(x+1)(y+1)(z+1)$$



Tam Bölen Sayısı:

$$2 \cdot (x+1)(y+1)(z+1)$$

Asal Bölenleri:

a, b, c olarak 3 tanedir.

* Tam bölenlerin toplamı 0'dır.

* Asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı $-(a+b+c)$ 'dir.

ÇÖZ

$(2x-1)$ ve $(y+5)$ aralarında asal iki sayıdır.

$$\frac{2x-1}{y+5} = \frac{20}{52} \text{ olduğuna göre}$$

$x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{2x-1}{y+5} = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$$

$$2x-1=5 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

$$y+5=13 \Rightarrow y=8$$

$$x \cdot y = 3 \cdot 8 = 24 \text{ olur.}$$

UYARI

- Aralarında asal sayı sorularında ifade sadeleştirilip karşılıklı olarak eşitlenir.

ÇÖZ

$A = 16 \cdot 10^a$ sayısının pozitif bölen sayısı 96'dır. Buna göre, A kaç basamaklı bir sayıdır?

ÖĞREN

$$2^4 \cdot 10^a = 2^4 \cdot 5^a \cdot 2^a \\ = 2^{a+4} \cdot 5^a$$

Pozitif tam bölenlerinin sayısı:

$$\underbrace{(a+5)}_{12} \underbrace{(a+1)}_8 = 96$$

$a = 7$ olduğundan $16 \cdot 10^7$ sayısı $2+7=9$ basamaklıdır.

UYARI

- Çarpanlara ayrılmış olarak verilen bir sayının pozitif bölen sayısı bulunurken çarpanlar kesinlikle asal sayı olmalıdır ve aynı asal sayılar varsa üsleri toplanarak ortak tabana çevrilmelidir.

ÇÖZ

270 sayısının tam bölenlerinden kaç tanesi 18'in katıdır?

ÖĞREN

Soruda bölen sayısından bahsedildiğinden verilen sayı asal çarpanlara ayrılır.

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$270 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ 'dir. 270 sayısının 18'in katı bölen sayısı sorulduğu için sayı 18 parantezine alınır.

$$270 = 3^2 \cdot 2^1 \cdot (3^1 \cdot 5^1)$$

Parantez içindeki ifadelerin kuvvetleri 1 arttırılır ve çarpılırsa 18'in katı pozitif bölen sayısı bulunur.

$$270 = 3^2 \cdot 2^1 \cdot (3^{\textcircled{1}} \cdot 5^{\textcircled{1}})$$

$$PSB = (1+1) \cdot (1+1) \\ = 4 \text{ 'tür.}$$

Çöz

a ve b birer doğal sayıdır.

$$300 \cdot a = b^3$$

olduğuna göre, $a+b$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

Öğren

Bu tür sorularda verilen değer asal çarpanlarına ayrılır. Bulunan çarpanlar eşitliğin sağındaki (yani b^3 sayısının) sayının kuvvetine eşit hâle getirilir.

Bunun için gerekli olan en küçük sayılar a sayısına eşitlenir.

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

$$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot a = b^3$$

2, 3 ve 5 sayılarının kuvvetlerini 3'e tamamlayacak sayılar a sayısıdır.

2^2 sayısının kuvvetini 3'e tamamlamak 2^1 sayısına,

3^1 sayısının kuvvetini 3'e tamamlamak 3^2 sayısına,

5^2 sayısının kuvvetini 3'e tamamlamak 5^1 sayısına ihtiyaç vardır.

$$0 \text{ hâlde; } a = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 9 \text{ olur.}$$

Bulunan a değeri yerine yazılırsa

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = b^3$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = b^3$$

$$b = 30 \text{ bulunur.}$$

$a+b$ toplamının en küçük değeri

$$a+b = 9+30 = 39 \text{ olur.}$$

Çöz

16. $(2x-5)^2 = y^4$ eşitliğindeki x pozitif bir sayı ise, x en az kaçtır?

Öğren

$$16 \cdot (2x-5)^2 = y^4$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2^4 \cdot 1 = 2^4$$

Bu durumda,

$$2x-5=1 \quad \text{ve} \quad 2x-5=-1$$

$$2x=6$$

$$2x=4$$

$$x=3$$

$$x=2$$

Böylece x en az 2 olur.

Çöz

P bir asal sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$P \cdot n = 5^P \text{ eşitliği sağlanıyor.}$$

Buna göre, $\frac{n}{P}$ oranı kaçtır?

Öğren

$$P \cdot n = 5^P \Rightarrow P \text{ sadece } 5 \text{ olabilir.}$$

Çünkü eşitliğin diğer tarafında başka bir asal çarpan yok.

$$P=5 \Rightarrow 5 \cdot n = 5^5$$

$$n = 5^4 \text{ olur.}$$

Buna göre cevap,

$$\frac{n}{P} = \frac{5^4}{5} = 125 \text{ bulunur}$$

Faktöriyel

✓ 1'den n 'ye kadar olan ardışık doğal sayıların çarpımına n faktöriyel denir.

$n!$ şeklinde gösterilir.

$0! = 1$ ve $1! = 1$ olarak tanımlanır.

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

UYARI

* $n \geq 5$ için $n!$ sayısının birler basamağı sıfırdır.

* Faktöriyeldeki sadeleştirme sorularında küçük olan sayının parantezine alıp sadeleştirme yapılır.

"Sondan kaç basamağı sıfırdır?" sorularında sayı ve bölümler devamlı 5'e bölünüp bölümler toplanır.

Çöz

$$\frac{6! + 7! + 8!}{8! - 7! - 6!} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

ÖĞREN

$$\begin{aligned} & \frac{6! + 7 \cdot 6! + 8 \cdot 7 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6! - 7 \cdot 6! - 6!} \\ &= \frac{6! (1 + 7 + 56)}{6! (56 - 7 - 1)} \\ &= \frac{64}{48} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Çöz

x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere; $125! = 35^x \cdot y$ eşitliğini sağlayan en büyük x tam sayı değeri kaçtır?

ÖĞREN

$35 = 5 \cdot 7$ olduğundan sayı devamlı 7'ye bölünür.

$$\begin{array}{r} 125 \overline{) 7} \\ 14 \overline{) 7} \\ \underline{2} \end{array}$$

$14 + 2 = 16$ olduğundan x 'in en büyük değeri 16 olur.

UYARI

Sayı asal ise devamlı 0 sayıya bölünüp, bölümleri toplanır. Sayı asal değil ise asal çarpanlarına ayrılıp büyük olan sayıya bölünür.

Çöz

$28! + 29!$ toplamının sondan kaç basamağında "0" vardır?

ÖĞREN

Sondan kaç basamağı 0'dır sorusunda sayı ve bölümler devamlı 5'e bölünür.

$$28! + 29! = 28! (29 + 1) = 30 \cdot 28!$$

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 5 \end{array}$$

$5 + 1 = 6$ tane

$28!$ sayısında sıfır vardır.

$$30 \cdot 28! = 5 \cdot 6 \cdot 28! \\ 1 + 6 = 7 \text{ tane sıfır var.}$$

ÇÖZ

$$\frac{(n+1)!}{n!+(n-1)!} = 4 \text{ olduğuna göre } n \text{ kaçtır?}$$

ÖĞREN

Büyük faktöriyelli ifade küçük faktöriyelli ifade cinsinden yazılır.

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)! + (n-1)!} = 4$$

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot (n+1)} = 4$$

$$n = 4 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

x bir pozitif tam sayı olmak üzere, $\frac{47!}{3^x}$ ifadesini, tam sayı yapan pozitif x tam sayılarının toplamı kaçtır?

ÖĞREN

x tam sayıları "kaç tanedir" veya "toplamı kaçtır?" sorularında x'in en büyük ve en küçük değeri bulunur. x değerleri $\min(x) \leq x \leq \max(x)$ aralığındadır. x'in en büyük değeri için 47 sayısı sürekli 3'e bölünür.

$$47 \begin{array}{r} 3 \\ 15 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 15+5+1=21 \\ \max(x) \end{array}$$

$$\min(x) = 1$$

$$1+2+3+\dots+21 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231$$

ÇÖZ

x ve y birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$51! = 8^x \cdot y$ ifadesinde y'nin alabileceği en küçük değer için x kaçtır?

ÖĞREN

y'nin en küçük değerini alması demek x'in en büyük değerini alması demektir.

Buna göre;

$$51! = 8^x \cdot y$$

asal sayı değildir.

Taban asal olmadığından önce taban asal hale getirilir.

$$51! = (2^3)^x \cdot y \text{ olur.}$$

$$51 \begin{array}{r} 2 \\ 25 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$25+12+6+3+1=47$ ancak cevabımız 47 değildir. Çünkü 2'nin kuvveti 3^x olduğundan bulunan 47 sayısı 3^x 'e eşitlenir.

$$47 = 3^x$$

$$15, 3 = x \text{ bulunur.}$$

x tam sayı olacağından virgülden sonraki kısım hesaba katılmaz ve $\max(x) = 15$ olur.

ÇÖZ

$$P(n) = \begin{cases} n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+14), & n > 5 \text{ ise} \\ n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+10)^2, & n < 5 \text{ ise} \end{cases}$$

1) $\frac{(n+2)!}{n!} = 56$ olduğuna göre $P(n)$ kaçtır?

2) $\frac{(n+4)! + (n+3)!}{(n+5) \cdot (n+2)!} = 4$ olduğuna göre $P(n)$ kaçtır?

ÖĞREN

1) $\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = 56$

$(n+2) \cdot (n+1) = 56$ ise $n = 6$ 'dır.

$6 > 5$ olduğundan

$P(6) = 6 + 7 + 8 + 9 + \dots + 20$

Ardışık sayıların toplam özelliğinden ;

T.S = $\frac{20-6}{1} + 1 = 15$

Toplam = $\frac{20+6}{2} \cdot 15 = 13 \cdot 15 = 195$ bulunur.

2) $\frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)! + (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+5) \cdot (n+2)!} = 4$

$\frac{(n+3) \cdot (n+2)! \cdot (n+4+1)}{(n+5) \cdot (n+2)!} = 4$

$\frac{(n+3) \cdot \cancel{(n+2)!} \cdot \cancel{(n+5)}}{\cancel{(n+5)} \cdot \cancel{(n+2)!}} = 4$

$n+3 = 4 \quad n=1$ bulunur.

$1 < 5$ olduğundan ;

$P(1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 11^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
 $= \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6}$
 $= 506$ bulunur.

1. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$330 = k \cdot 2^a \cdot 3^b$$

esitliğini sağlayan en küçük k pozitif tam sayısı kaçtır?

- A) 65
B) 60
C) 55
D) 50
E) 45

2. n bir tam sayı olmak üzere, $\frac{240}{n}$ ifadesi bir asal sayıya eşittir. Buna göre, n'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

- A) 124
B) 164
C) 196
D) 224
E) 248

3. $\frac{n! + (n+1)!}{(n-1)! + n!} = \frac{8}{3}$ ise

$$\frac{n! + (n-1)!}{(n+1)!}$$
 işleminin sonucu

kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$
B) 1
C) $\frac{3}{2}$
D) 3
E) $\frac{7}{2}$

4. $\odot x = (x+1)!$, $\square x = (x-2)!$ olarak tanımlanıyor. Buna göre,

$$\frac{\odot(x+1)}{\square(x+2)} = 12$$
 ise $\square x \cdot \odot x$ ifadesinin sonucu kaçtır?

- A) 0
B) 6
C) 12
D) 24
E) 36

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	E	A	B
D	A	B	C
E	B	C	D
A	C	D	E
B	D	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyin, anılarını çizgi ile birleştirin.

Doğru Cevaplar
C, E, A, B

EBOB - EKOK

* İki ya da daha fazla sayıyı aynı anda bölen pozitif tam bölenlerin en büyüğüne, bu sayıların EBOB'u denir.

* İki ya da daha fazla sayının tam katı olan sayılardan en küçüğüne, bu sayıların EKOK'u denir.

* a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere;

$$EBOB(a, b) \leq a, b \leq EKOK(a, b)$$

$$EBOB(a, b) \cdot EKOK(a, b) = a \cdot b$$

* a, b aralarında asal sayılar, ardışık sayılar veya ardışık tek sayılar ise;

$$EBOB(a, b) = 1 \text{ 'dir.}$$

$$EKOK(a, b) = a \cdot b \text{ 'dir.}$$

* Ardışık çift pozitif tam sayıların EBOB'u 2'dir.

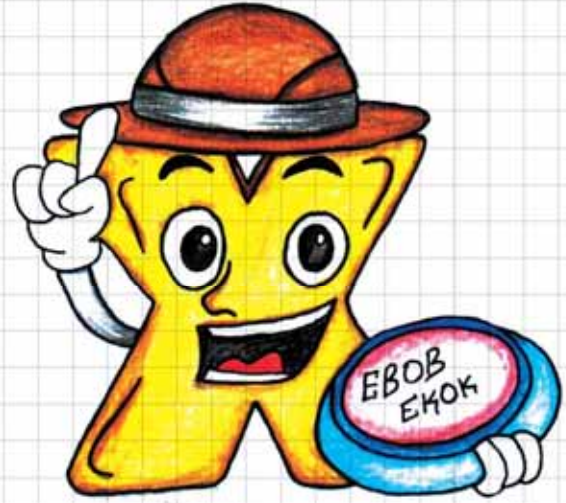
$$EKOK\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{EKOK(a, c)}{EBOB(b, d)}$$

ÖR

90, 135, 180 sayılarının EBOB'u kaçtır?

ÖĞREN

90	135	180	2	Verilen sayı-
45	135	90	5	ların en
9	27	18	3	büyük ortak
3	9	6	3	bölenleri
1	3	2	3	
	1	2	2	$3 \times 5 = 15$ 'tir.
		1		



UYARI

* $EBOB(a, b) = 3$ ise

$a = 3x$ ve $b = 3y$ seçilir.

Ayrıca x, y aralarında asal olmak zorundadır.

* $EKOK(a, b) = 90$ ise $a = \frac{90}{x}$,

$b = \frac{90}{y}$ seçilir ve x ile y aralarında asal olmak zorundadır.

* Problem soruları çözümlerken püf noktalar; tur, sefer, nöbet ve eşit parçalar ifadeleri varsa EKOK sorularıdır.

EBOB

- ✓ Sorunun içinde sayılar büyükse,
- ✓ Soruda, böl, parçala, ayır geçerse,
- ✓ Büyük parçadan, küçük parçalara gidilirse, EBOB kullanılır.

EKOK

- ✓ Sorunun içinde geçen sayılar küçükse,
- ✓ Soruda, yan yana getir, birleştir geçerse,
- ✓ Küçük parçalardan büyük parçaya geçilirse, EKOK kullanılır.

ÇÖZ

a, b ve c pozitif tam sayılar ve $a < b < c$ 'dir.

$$\text{EBOB}(a, b) = 2$$

$\text{EBOB}(b, c) = 5$ olduğuna göre, $a + b + c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

ÖĞREN

$$\left. \begin{array}{l} a = 2x \\ b = 10y \\ c = 5z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \text{ ile } y, y \text{ ile } z \\ \text{aralarında asal ola-} \\ \text{cak şekilde seçilir.} \end{array}$$

$a < b < c$ olduğundan

$x = 1, y = 1$ ve $z = 3$ için

$a = 2, b = 10$ ve $c = 15$ olur.

$$a + b + c = 2 + 10 + 15 = 27 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

x, a ve b pozitif tam sayıdır.
 $x = 40 + 1 = 11b + 7$ olduğuna göre, x 'in üç basamaklı en küçük değerinin rakamları toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$x + 15 = 4a + 16 = 11b + 22$$

$$x + 15 = 4(a + 4) = 11(b + 2)$$

$x + 15 = \text{EKOK}(4, 11)$ 'in katları olmalıdır.

$$x + 15 = 44k \text{ 'dir. } k = 3 \text{ için,}$$

$$x + 15 = 132 \quad x = 117 \text{ olur.}$$

Rakamları toplamı 9 'dur.

ÇÖZ

Ardışık iki doğal sayının EKOK ve EBOB 'nın toplamı 57 'dir. Buna göre, küçük sayı kaçtır?

ÖĞREN

Ardışık iki doğal sayının EBOB 'u 1 ve EKOK 'u sayıların çarpımıdır.

Sayılar a ve b olsun.

$$\text{EBOB}(a, b) = 1 \text{ ve } \text{EKOK}(a, b) = a \cdot b$$

$$\text{EBOB}(a, b) + \text{EKOK}(a, b) = 57$$

$$1 + a \cdot b = 57 \quad a \cdot b = 56 \text{ olur.}$$

Çarpımları 56 olan ardışık iki sayı;

$a = 7$ ve $b = 8$ 'dir. Bu durumda küçük sayı $a = 7$ bulunur.

ÇÖZ

Bir çiçekçi, çiçeklerini 6'şarlı 8'erli ve 12'şerli olarak demetlediğinde her seferinde 4 çiçeği artmaktadır.

Çiçeklerinin sayısı 214'ten fazla olduğuna göre, çiçekçinin en az kaç çiçeği vardır?

ÖĞREN

Önce verilen sayıların EKOK'ları bulunur.

$$\text{EKOK}(6, 8, 12) = 24$$

Her seferinde 4 çiçek arttığından EKOK'a eklenmesi gerekmektedir. Ancak bu soruda çiçeklerin 214'ten fazla olması istendiği için önce bulunan EKOK'un katları alınarak 214'ten büyük veya 214'e yakın hale getirilir. Daha sonra bulunan sayıya 4 eklenir.

$$24 \cdot 9 = 216 > 214 \text{ olduğu için } 216 \text{ sayısı alınır.}$$

$$216 + 4 = 220 \text{ çiçeklerin sayısı elde edilir.}$$

ÇÖZ

Kenar uzunlukları 120 cm ve 105 cm olan dikdörtgen şeklindeki karton es kare parçalara ayrılacaktır.

Buna göre en az kaç parça oluşur?

ÖĞREN

Parçalara ayrılıyor ise EBOB sorusudur.

$\text{EBOB}(105, 120) = 15$ olduğundan oluşacak karelerin bir kenarı 15 cm olmalıdır. Kartonun alanı karelerden birisinin alanına bölünürse kaç tane kare olduğu bulunur.

$$\frac{120 \cdot 105}{15 \cdot 15} = 56$$

ÇÖZ

İçinde 48 kg un, 72 kg şeker ve 90 kg tuz olan çuvalar, birbirine karıştırılmadan eşit hacimli torbalara konulacaktır. En az kaç torba gereklidir?

ÖĞREN

$\text{EBOB}(48, 72, 90) = 6$ olup bir torba en çok 6 kg dur. Un için $48/6 = 8$ torba, şeker için $72/6 = 12$ torba, Tuz için $90/6 = 15$ torba gerekir.

$$\text{Toplam } 8 + 12 + 15 = 35 \text{ torba gerekir.}$$

Çöz

Kenar uzunlukları 32, 40 ve 56 m olan üçgen biçimindeki bir bahçenin kenarlarına ve köşelerine gelecek şekilde eşit aralıklarla çiçek dikilecektir.

Buna göre, en az kaç çiçek gerekir?

ÖĞREN

Soruda eşit ifadesi geçtiğinden sayıların EBOB'u bulunur. EBOB bulunduktan sonra sorunun içinde dikdörtgen ve kare, dikdörtgenler prizması ve küp ifadeleri geçmediği için katılar toplanır.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 40 & 56 & 8 \\ \hline 4 & + & 5 & + & 7 & = & 16 \text{ çiçek} \end{array}$$

"İlk önce kendine ne olacağını sor; sonra ne yapman gerekiyorsa yap."

Epiktetos

Çöz

Boyutları 6 cm, 8 cm ve 15 cm olan dikdörtgenler prizması biçimindeki kutular yan yana, üst üste konularak en küçük hacimli bir küp yapılmak istenirse bu iş için en az kaç kutu gerekir?

ÖĞREN

Parçalar birleştirilerek bir bütün oluşturulmaya çalışıldığı için kenar uzunluklarının Ekok'u bulunur. Bulunan Ekok küpün bir kenarının uzunluğudur. Kutu sayısını bulmak için küpün hacmi, dikdörtgenler prizmasının hacmine bölünür.

• Küpün hacmi ve dikdörtgenler prizmasının hacmi üç boyutunun çarpımıdır. Küpün üç boyutu birbirine eşittir.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 8 & 15 & 2 & \text{Ekok (6,8,15)} \\ 3 & 4 & 15 & 2 & = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 3 & 2 & 15 & 2 & \\ 3 & 1 & 15 & 3 & = 120 \text{ olur.} \\ 1 & & 5 & 5 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$\text{Kutu Sayısı} = \frac{\text{Küpün Hacmi}}{\text{Dikdörtgenler Prizmasının Hacmi}}$$

$$\text{Kutu Sayısı} = \frac{120 \cdot 120 \cdot 120}{6 \cdot 8 \cdot 15} = 20 \cdot 15 \cdot 8 = 2400$$

1.	A	B	C	2
	D	B	C	2
	E	B	C	3
	1	F	G	3
		1	G	5
			1	

A, D ve E birbirinden farklı, B ve F birbirinden farklı, C ve G birbirinden farklı pozitif tam sayılardır. A, B, C sayıları için yukarıda verilen asal çarpanlara ayırma tablosuna göre, $\frac{B+C}{A}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

2. 20, 45 ve 75 sayılarıyla bölünebilen 2000'den küçük kaç doğal sayı vardır?

- A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

3. a ve b birinden farklı, aralarında asal iki doğal sayıdır.

$$A = OBEB(a, b)$$

$$B = OKEK(a, b)$$

$$C = a + b$$

$D = a \cdot b$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A) $A < B < C < D$
B) $A < C < B = D$
C) $B < D < C < A$
D) $A < B = D < C$
E) $A < B < D < C$

Cevap Performansı

1	2	3
A	A	B
B	C	C
C	D	D
D	E	A
E	B	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
A, A, B

RASYONEL SAYILAR

- * a ve b tam sayı olmak üzere;
 $\frac{a}{b}$ ifadesine kesir, a'ya pay, b'ye payda denir.

Kesir Çeşitleri:

Basit Kesir:

Payı paydasından mutlak değerce küçük olan kesirlere basit kesirler denir.

- $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{8}{10}, \dots$

Bileşik Kesir:

Payı paydasından mutlak değerce büyük veya eşit olan kesirlere bileşik kesir denir.

- $\frac{7}{4}, \frac{8}{3}, -\frac{17}{9}, 6, -8, \dots$

Tam Sayılı Kesir:

Bileşik kesirlerin tam sayılarla ifade edilmesidir.

- $2\frac{1}{5}, -3\frac{2}{7}, \dots$



UYARI!

$a\frac{b}{c}, a+\frac{b}{c}$ şeklinde yazılır.

Rasyonel Sayılarda İşlemler

Toplama - Çıkarma:

- Paydalar aynı ise paylar toplanır veya çıkarılır.
- $\frac{7}{8} + \frac{6}{8} = \frac{13}{8}$
- $\frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$



- Paydalar aynı değil ise paydalar eşitlenir.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} = \frac{21}{28} + \frac{8}{28} = \frac{29}{28}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

Çarpma:

Pay ile pay, payda ile payda çarpılır.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Bölme:

Birinci kesir aynen yazılır.

İkinci kesir ters çevrilip çarpılır.

$$\frac{3}{7} : \frac{9}{92} = \frac{3}{7} \cdot \frac{92}{9} = \frac{276}{63}$$

Rasyonel Sayılarda Sıralama

$\frac{a}{b}$ kesrinde; a'yı pasta, b'yi kişi olarak düşünelim.

✓ Payları eşit olan iki kesirden paydası küçük olan daha büyüktür.

$$\frac{2}{7} > \frac{2}{9}$$

ÖRNEK

"2 pastayı 7 kişiye veya 9 kişiye bölünce mi daha fazla düşer?" şeklinde düşünmeliyiz.



- ✓ Paydaları eşit olan iki kesirden payı büyük olan daha büyüktür.

$$\frac{3}{7} > \frac{1}{7}$$

ÖRNEK

"4 kişiye 1 pasta dağıtılınca mı yoksa 3 pasta dağıtılınca mı daha fazla pasta düşer?" şeklinde düşünmeliyiz.



- ✓ Pay ile payda arasındaki farklar eşitse basit kesirde değerler büyüdükçe kesir büyür. Ancak birleşik kesirlerde tam tersidir.

$$\frac{11}{12} < \frac{17}{8}, \frac{13}{9} > \frac{21}{17}$$

- ✓ Verilen üç kesirden ikisinin payı, ikisinin de paydası eşitse şu şekilde sıralanır;

$$a = \frac{23}{43} \quad b = \frac{29}{31} \quad c = \frac{28}{43}$$

$a < b$ ve $c < a$ olduğundan;
 $c < a < b$ 'dir.



UYARI

Negatif olan rasyonel ifadeler pozitif gibi düşünür, sonra eşitsizlikler ters çevrilir.

Ondalık Sayılar

- ✓ Paydası 10'un pozitif kuvvetleri şeklinde yazılan veya bu şekle getirilebilen sayılara ondalık sayılar denir.

- ✓ Ondalık sayılarda toplama çıkarma yapılırken; virgüller aynı hizaya gelecek şekilde işlem yapılır.

- ✓ Ondalık sayılarda çarpma işlemi yapılırken, rasyonele çevirip çarpmak daha kolaydır.

- ✓ Ondalık sayılarda bölme işlemi yapılırken basamak kaydırma işlemi yapılır.

Devirli Ondalık Sayılar

- ✓ Devirli ondalık sayı rasyonel sayıya şöyle çevrilir;

Sayının tamamı - Sayının devretmeyen kısmı

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Virgülden sonra} \\ \text{devreden rakam} \\ \text{kadar dokuz} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Virgülden sonra} \\ \text{devretmeyen} \\ \text{kadar 0} \end{array} \right\}$
---	--

Çöz

$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{21}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21}\right)$ işleminin sonucu kaçtır?

Öğren

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{21}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21}\right)$$

$$\left(\frac{7+1}{21}\right) : \left(\frac{7-1}{21}\right)$$

$$\left(\frac{8}{21}\right) : \left(\frac{6}{21}\right)$$

$$\frac{8}{21} \cdot \frac{21}{6}$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Çöz

$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 $= \frac{29}{2}$ olduğuna göre, n kaçtır?

Öğren

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdots \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2} = \frac{29}{2}$$

$$n+1 = 29$$

$$n = 28 \text{ bulunur.}$$

Çöz

a, b pozitif ve aralarında asal sayılardır.

$1,4\bar{3} = \frac{a}{b}$ olduğuna göre,

$a+b$ toplamı kaçtır?

Öğren

$$1,4\bar{3} = \frac{143-14}{90}$$

$$= \frac{129}{90} = \frac{43}{30} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{43}{30} \text{ olmalıdır.}$$

a, b aralarında asal hale geldiğinden, $a+b = 43+30 = 73$

Çöz

$$a = \frac{11}{9} \quad b = \frac{111}{90} \quad c = \frac{1111}{900}$$

olduğuna göre, a, b ve c 'yi
büyükten küçüğe doğru sıralayın.

Öğren

Hepsinin paydasını 900 yapmak için çalışalım.

$$a = \frac{1100}{900} \quad b = \frac{1110}{900} \quad c = \frac{1111}{900}$$

$$a < b < c \text{ olur.}$$

"Zorlukları aşmanın
tek yolu,
yeni girişimlerde bulunmaktır"

Goethe

ÇÖZ

$$7 - \frac{15}{2 + \frac{5}{x+1}} = 4 \text{ olduğuna göre, } x \text{ kaçtır?}$$

ÖĞREN

Halkalama metodu uygulanırsa

$$7 - \frac{15}{2 + \frac{5}{x+1}} = 4 \rightarrow \frac{15}{2 + \frac{5}{x+1}} = 3$$

$$2 + \frac{5}{x+1} = 5 \Rightarrow \frac{5}{x+1} = 3 \text{ 'tür.}$$

Halka burdan itibaren devam etmez. Bu yüzden ifadenin kaldığı yerden çözüme gidilir.

$$\frac{5}{x+1} = 3$$

$$5 = 3x + 3 \quad 2 = 3x \quad x = \frac{2}{3} \text{ 'tür.}$$

ÇÖZ

$$a = \frac{2b-1}{4b+5} \text{ eşitliği veriliyor.}$$

Buna göre, a'nın hangi değeri için b bulunamaz?

ÖĞREN

b ifadesi yalnız bırakılmalıdır,

$$\frac{2b-1}{4b+5} = a \Rightarrow 2b-1 = 4ba+5a$$

$$2b-4ba = 5a+1 \Rightarrow b(2-4a) = 5a+1$$

$$\Rightarrow \frac{b(2-4a)}{2-4a} = \frac{5a+1}{2-4a}$$

$$b = \frac{5a+1}{2-4a} \text{ elde edilir.}$$

Paydayı sıfır yapan değerlerde ifade tanımsız olacağına göre,

$$2-4a=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

ÇÖZ

a, b ve c negatif reel sayılardır.

$$a.b = \frac{17}{20}$$

$$b.c = \frac{23}{26}$$

$$a.c = \frac{29}{31}$$

olduğuna göre, a, b ve c'yi büyüktten küçüğe doğru sıralayınız.

ÖĞREN

Pay ve paydası arasındaki farkları eşit olan (hepsinde fark 3'tür.) basit kesirlerde pay ve paydası büyük olan kesir en büyüktür.

$$a.b = \frac{17}{20} \text{ fark 3} \rightarrow \text{En küçük}$$

$$b.c = \frac{23}{20} \text{ fark 3}$$

$$a.c = \frac{29}{31} \text{ fark 3} \rightarrow \text{En büyük}$$

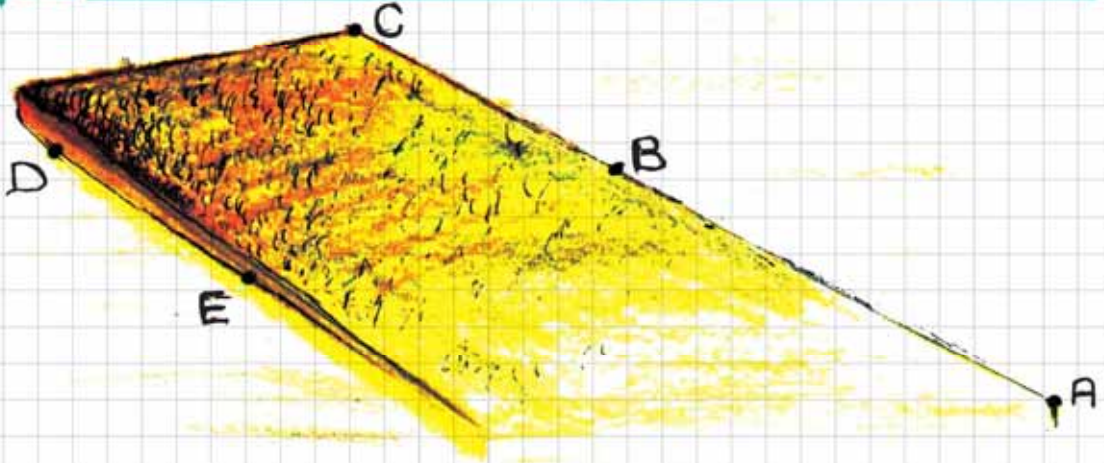
0 hâlde sıralama,

$$c > a > b \rightarrow \text{Pozitifken olur.}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 En büyük ortak En küçük

Ancak a, b ve c negatif reel sayılar olduğundan sıralama; $c < a < b$ olur.

ÇÖZ



Yukarıdaki tarlanın sahibi tarlasının etrafını ölçmek için tarlanın sınır çizgilerini A, B, C, D ve E gibi harfler ile işaretliyor. Her iki harf arası uzunluk aşağıdaki gibi verilmiştir.

Uzunluk	A-B	B-C	C-D	D-E	E-A
K	$\frac{3K}{4}$	$\frac{5K}{2}$	$\frac{3K}{2}$	$\frac{4K}{3}$	$\frac{7K}{2}$

E-A arası mesafe D-E arası mesafeden 26 metre daha uzun olduğuna göre, tarlanın çevresi kaç metredir?

ÖĞREN

$$\frac{7K}{2} - \frac{4K}{3} = 26$$

(3) (2)

$$\frac{21K - 8K}{6} = 26$$

$$\frac{13 \cdot K}{18} = \frac{6 \cdot 26^2}{18} \quad K=12$$

Tarlanın çevresi T olsun.

$$T = \frac{3K}{4} + \frac{5K}{2} + \frac{3K}{2} + \frac{4K}{3} + \frac{7K}{2}$$

$$T = \frac{3K}{4} + \frac{7K}{3} + \frac{6K}{1}$$

(3) (4) (12)

$$T = \frac{9K + 28K + 72K}{12}$$

$$T = \frac{109 \cdot K}{12} \quad T = \frac{109 \cdot 12}{12}$$

T=109 metre bulunur.

1. a, b ve c pozitif tam sayılardır.

$$a + \frac{2}{b + \frac{1}{c}} = \frac{17}{9}$$

olduğuna göre, $a+b+c$ toplamı en az kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

2. a negatif bir sayı olmak üzere;

$$x = \frac{3a}{44}, y = \frac{-a}{30}, z = \frac{2a}{15}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $x < y < z$
B) $x < z < y$
C) $y < x < z$
D) $z < x < y$
E) $z < y < x$

3. $y = \frac{4x-7}{2x+1}$ eşitliği veriliyor.

Buna göre, x 'in y tırından eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{y-7}{4-2y}$
B) $\frac{y+7}{2y-4}$
C) $\frac{y+7}{4-2y}$
D) $\frac{y-7}{2y-4}$
E) $\frac{7-y}{4-2y}$

$$4. \frac{7}{1 - \frac{3}{2 + \frac{1}{2x-3}}}$$

kesirini tanımsız yapan kaç tane x değeri vardır?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

sozucu

Cevap Performansı

1	2	3	4
E	D	C	B
A	E	D	C
B	A	E	D
C	B	A	E
D	C	B	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, analarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
E, D, C, B

BASİT EŞİTSİZLİKLER

* $>, \geq, <, \leq$ gibi sembollerle gösterilen ifadelere denir.

- a pozitif reel sayı ise $a > 0$
- a negatif reel sayı ise $a < 0$ 'dır.



NOT

Bir eşitsizliğin her tarafına aynı sayı eklenip çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.

$a < b$ iken $a+c < b+c$ 'dir.

$a < b$ iken $a-c < b-c$ 'dir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse yön değiştirmez. Ancak negatif bir sayıyla bölünürse ya da çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.

$a < b$ ve $c > 0$ iken $a \cdot c < b \cdot c$

$a < b$ ve $c > 0$ iken $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

$a < b$ ve $c < 0$ iken $a \cdot c > b \cdot c$

$a < b$ ve $c < 0$ iken $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

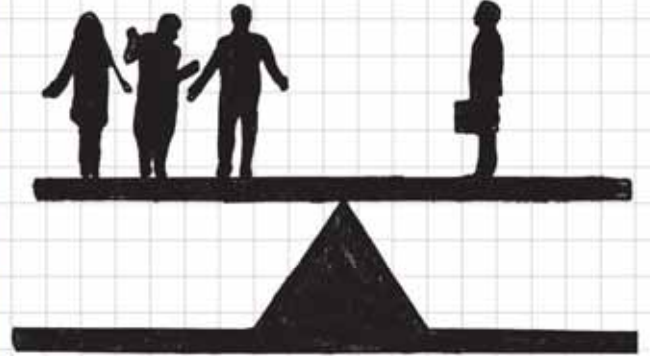
Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir. Ancak taraf tarafa çıkarma yapılamaz.

$a < b$ ve $c < d$ iken

$a < b$

$+ c < d$

$[a < b] + [c < d] \Rightarrow a+c < b+d$



Eşitsizliklerde Toplama ve Çıkarma

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ \frac{+}{+} & \frac{+}{+} & \frac{+}{+} \\ \frac{<}{<} & \frac{<}{<} & \frac{\leq}{\leq} \end{array}$$

* $a^2 < a$ ise $0 < a < 1$ 'dir.

* $a^2 < -a$ ise $-1 < a < 0$ 'dır.

* Aynı işaretli sayılardan oluşan eşitsizliklerin çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değiştirir.

$0 < a < b$ ya da $a < b < 0$ ise

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.

* $a < x < b$ ve $c < y < d$ eşitsizliklerinde x ve y 'ye bağlı bir ifadenin alabileceği en büyük ve en küçük değerler sorulduğunda aralıklarda;

- x ve y tam sayı diyorsa aralıktan değer verilip yerine yazılır.

• x ve y reel sayı diyorsa ya da hiç bir bilgi vermiyorsa yeni aralık oluşturulup bu aralıktan değer alınır.

Bir Aralığın Karesini Alma:

Bir aralığın karesi alınırken aralıkta sıfır varsa en küçük değer 0'dır. En büyük değer ise sınır değerlerinden karesi büyük olan değerdir. Ancak aralıkta sıfır yoksa alt ve üst değerlerin kareleri alınıp; küçük olan alt sınıra, büyük olan üst sınıra yazılır.

UYARI

Aralıkta 0 yoksa;

$$1 < x < 3 \rightarrow 1 < x^2 < 9$$

$$-5 < x < -2 \rightarrow 4 < x^2 < 25 \text{ olur.}$$

Eşitsizliklerde Çarpma

$a < x < b$ ve $c < y < d$ eşitsizliklerinde xy çarpımının hangi aralıkta olduğunu bulmak için;

$a.c, b.d, a.d, b.c$ çarpımları bulunur.

Bulunan en küçük değer alt sınıra, en büyük değer üst sınıra yazılır.

ÇÖZ

$-7 < 2x - 1 \leq 5$ olduğuna göre $\frac{x}{3} + 2$ ifadesinin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$-7 < 2x - 1 \leq 5 \quad (\text{her tarafa } +1)$$

$$-6 < 2x \leq 6 \quad (\text{her tarafa } :2)$$

$$-3 < x \leq 3 \quad (\text{her tarafa } :3)$$

$$-1 < \frac{x}{3} \leq 1 \quad (\text{her tarafa } +2)$$

$$1 < \frac{x}{3} + 2 \leq 3$$

2 ve 3 değerlerini alabilir.

$$2 + 3 = 5 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$x < 0$ olmak üzere;

$4xy - 6x < 0$ olduğuna göre, y 'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

ÖĞREN

y ifadesi sorulduğundan y 'li terim yalnız bırakılırsa;

$$4xy - 6x < 0 \quad 4xy < 6x$$

x negatif olduğundan her taraf $4x$ ile bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

$$y > \frac{6x}{4x} \quad y > \frac{3}{2} \text{ olur.}$$

0 hâlde, y 'nin en küçük tam sayı değeri 2'dir.

çöz

Sıfırdan farklı a ve b gerçel sayıları için $a < b$ ve $a^2 < b^2$ olduğuna göre;

I. $a \cdot b < 0$

II. $a + b > 0$

III. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

İfadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

ÖĞREN

$a < b$ ise $a - b < 0$ ve
 $a^2 < b^2$ ise $a^2 - b^2 < 0$ olur.
 $a^2 - b^2 < 0$,

$$\underbrace{(a-b)}_{(-)} \underbrace{(a+b)}_{(+)} < 0 \text{ ise}$$

$a + b > 0$ olmalıdır. (II. Doğru)

$a < b$ ise $a < 0 < b$ veya
 $0 < a < b$ olabilir.

$a \cdot b < 0$ ifadesi daima doğru değildir. (I. Yanlış)

$a < 0 < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ifadesi

her zaman doğru olmaz. Aynı durum için $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ifadesi de

her zaman doğru olamaz.

(III. Yanlış)

çöz

x ve y birer reel sayıdır.

$$2 < x \leq 4$$

$$-5 \leq y < 1$$

olduğuna göre, $4x - y$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

ÖĞREN

Öncelikle eşitsizliklerdeki x ve y değerlerini $4x - y$ ifadesine benzetmeliyiz.

$$2 < x \leq 4 \text{ (Her tarafta } \times 4 \text{)}$$

$$8 < 4x \leq 16$$

$$-5 \leq y < 1 \text{ (Her tarafta } \times -1 \text{)}$$

$$-1 < -y \leq 5$$

$$-1 < -y \leq 5$$

$$+ 8 < 4x \leq 16$$

$$7 < 4x - y \leq 21$$

$4x - y$ 'nin alabileceği değerler;

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
 17, 18, 19, 20, 21.

$$(21 - 8) + 1 = 14 \text{ değer alabilir.}$$

"İnciler kumsalda
 bulunmazlar,

eğer istiyorsan
 dalmalısın."

Gin Atasözü

ÇÖZ

x, y, z negatif tam sayılar,
 $3x = 5y$
 $2y = 7z$ olduğuna göre x, y ve z 'yi
 küçükten büyüğe doğru sırala-
 yınız.

ÖĞREN

$3x = 5y$ ve $2y = 7z$ eşitliklerinde
 ortak olan y ifadesinin katsa-
 yılarını eşitlemek için $3x = 5y$
 eşitliği 2 ile, $2y = 7z$ eşitliği
 de 5 ile çarpılmalıdır.

$$\begin{array}{ll} 3x = 5y & 2y = 7z \\ 2 \cdot 3x = 2 \cdot 5y & 5 \cdot 2y = 5 \cdot 7z \\ 6x = 10y & 10y = 35z \end{array}$$

Elde edilen eşitliklerde $10y$
 ortak olduğundan birleştirilirse;
 $6x = 10y = 35z$ olur.

Bu eşitlikte kat sayısı küçük
 olan ifade en büyük, katsayısı
 büyük olan ifade en küçüktür.

$$\begin{array}{ccc} 6x = 10y = 35z \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{en} & \text{ortanca} & \text{en} \\ \text{büyük} & & \text{küçük} \end{array}$$

Buna göre, sıralama $x > y > z$ 'dir.

Ancak x, y ve z negatif ol-
 duğundan bulunan sıralamanın
 tersi doğru sıralama olacaktır.

$$\begin{array}{l} x > y > z \rightarrow \text{Pozitifken} \\ x < y < z \rightarrow \text{Negatifken} \end{array}$$

ÇÖZ

$x < y < 0$
 $z = \frac{2x-y}{x}$ olduğuna göre,
 z 'nin en geniş çözüm aralığı-
 nı bulunuz.

ÖĞREN

$$\begin{aligned} z &= \frac{2x-y}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{y}{x} \\ &= 2 - \frac{y}{x} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$x < y$ eşitsizliğinde her taraf
 negatif olan x ile bölünürse
 eşitsizlik yön değişir.

$$\frac{x}{x} > \frac{y}{x} \Rightarrow 1 > \frac{y}{x} \text{ olur.}$$

x ve y ifadelerinin ikisi de
 negatif olduğundan $\frac{y}{x}$ ifar-
 desini sıfırdan büyük olacağıın-
 dan eşitsizlik,

$$0 < \frac{y}{x} < 1 \text{ olur.}$$

$2 - \frac{y}{x}$ ifadesini elde edebil-
 mek için eşitsizlik önce

(-1) ile çarpılır sonra da

her tarafa 2 eklenirse,

$$0 < \frac{y}{x} < 1 \Rightarrow 0 > -\frac{y}{x} > -1$$

$$\Rightarrow 2 > 2 - \frac{y}{x} > 1 \text{ bulunur.}$$

0 hâlde, $z = 2 - \frac{y}{x}$ eşitliği

için z 'nin aralığı $1 < z < 2$ 'dir.

ÇÖZ

a pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{a+4}{3} - \frac{a-1}{2} > a-2$$

eşitsizliğini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{a+4}{3} - \frac{a-1}{2} > a-2$$

(2) (3)

$$\frac{2a+10-3a+3}{6} > a-2$$

$$\frac{-a+13}{6} > a-2$$

$$-a+13 > 6a-2 \quad 15 > 7a$$

a=1 ve 2 değerlerini alır.

$$1+2=3 //$$

ÇÖZ

x, y ve z gerçel sayıları için $x \cdot z < 0 < x < y+z$ olduğuna göre x, y ve z'yi büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

ÖĞREN

$0 < x$ olduğunda x pozitif $x \cdot z < 0$

oldüğünde $z < 0$ z negatif

$x < y+z$ olduğunda $y > x$

(+) (-)

oldüğünden sıralama $y > x > z$

oldüğünden $z < x < y$ olur.

ÇÖZ

Bir vinçin yük kaldırma kapasitesi 5 ton iken gerekli çalışmalar yapıp gücü 6 ile 10 ton kadar arttırılması hedeflenmektedir.

Buna göre, gerekli çalışmalar yapıldıktan sonra bu vinçin kaldırabileceği yük kapasitesi hangi değerler arasında olur?

ÖĞREN

Başlangıçta yük kaldırma kapasitesi 5 ton ise 6 ton arttırsak 11 ton olur.

10 ton arttırsak 15 ton olur. Yani 11 ton ve 15 ton arasında değerler alır. Bunu da aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$11 \leq x \leq 15$$

⇓

$$|x-13| \leq 2$$

1. x ve y birer tam sayıdır.

$$-6 < x < 5$$

$$-2 \leq y < 4$$

olduğuna göre, $3x^2 - 2y^3$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -5 B) -4 C) 16
D) 37 E) 54

2. x, y ve z birer reel sayı olmak üzere;

$$x \cdot y^2 < 0$$

$$x^2 \cdot y + 4x^2 < 0$$

$$x \cdot y \cdot z - x \cdot z > 0$$

olduğuna göre, x, y ve z 'nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -, -, -
B) -, -, +
C) +, -, +
D) +, -, -
E) +, +, +

3. x, y, z birbirinden farklı pozitif tam sayılardır.

$$\frac{x-y}{y} < 2$$

$$\frac{y+z}{z} > 5$$

olduğuna göre, $x+y+z$ toplamı en az kaçtır?

- A) 8 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

4. a, b ve c negatif reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{2}{a \cdot b} = \frac{3}{b \cdot c} = \frac{5}{a \cdot c}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

- A) $c < b < a$
B) $c < a < b$
C) $b < c < a$
D) $a < c < b$
E) $a < b < c$

Soru Çözümü

Cevap Performansı

1	2	3	4
D	B	A	B
E	C	B	D
A	D	C	E
B	E	D	C
C	A	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işarette, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
D, B, A, B

MUTLAK DEĞER

Sayı doğrusu üzerinde herhangi bir a noktasının başlangıç noktasına olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir.

$x \in \mathbb{R}$ için x'in mutlak değeri $|x|$ sembolü ile gösterilir.

Mutlak değer içindeki ifade pozitifse, dışarıya aynen çıkar; negatifse işaret değiştirerek çıkar.

**NOT**

x sayısının y sayısına uzaklığına $|y-x|$ denir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

UYARI

Mutlak değerin içindeki ifade pozitifse mutlak değerden aynen çıkar. Eğer negatifse dışarıya çıkarılırken (-) ile çarpılır.

x ve y birer reel sayı ve $|x| + |y| = 0$ ise $x=0$ ve $y=0$ 'dir.

**Mutlak Değerin Özellikleri**

- * $|x| \geq 0$ 'dir.
- * $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ve $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $y \neq 0$
- * $|-x| = |x|$ ve $|x-y| = |y-x|$ 'tir.
- * $|x^n| = |x|^n$ 'dir.
- * $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$
- * $\sqrt[n]{x^{2n+1}} = x$
- * a pozitif reel sayı ve $|x|=a$ ise, $x=a$ veya $x=-a$ olabilir.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler:

✓ $|f(x)| < a$ eşitsizliğinde çözüm kümesi;

$a > 0$ ise $-a < f(x) < a$

$a < 0$ ise boş kümedir.

✓ $|f(x)| > a$ eşitsizliğinde çözüm kümesi;

$a > 0$ ise $f(x) > a$ veya $f(x) < -a$

$a < 0$ ise bütün gerçel sayılardır.

✓ $a, b \in \mathbb{R}^+$

$a < |f(x)| < b$ eşitsizliğinde çözüm kümesi;

$a < |f(x)| < b$ veya $a < -f(x) < b$

Çöz

$a < b < 0$ gerçel sayıları için
 $\frac{|a+b|+b}{|-a|}$ ifadesinin eşiti
 nedir?

Öğren

Mutlak değer in içi negatif ise
 önüne (-) alır. Pozitif ise aynı
 çıkar.

$$= \frac{\overbrace{|a+b|}^{-} + b}{|-a|} = \frac{-a-b+b}{-a}$$

$$= \frac{-a}{-a} = 1 \text{ bulunur.}$$

Çöz

x ve y gerçel sayılar için
 $x = 2 + |y-2|$
 $y = 4 - |2-x|$ olduğuna göre,
 $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

Öğren

$x-2 = |y-2|$ ise $|x-2| = |y-2|$ olur
 $|2-x| = 4-y \rightarrow |x-2| = 4-y$
 şeklinde yazılabilir. Her iki
 eşitliğin de karelerini alalım.
 $|x-2|^2 = |y-2|^2$
 $|x-2|^2 = (4-y)^2$ sol taraflar eşit
 geldiğinde, sağ taraflar da
 eşittir.

$$y^2 - 4y + 4 = 16 - 8y + y^2$$

$$4y = 12, y = 3$$

$y = 3$ yerine yazalım.

$$x = 2 + |3-2|$$

$$x = 2 + 1 \quad x = 3$$

$$x \cdot y = 9 \text{ olur.}$$

Çöz

x gerçel sayısı için
 $|x-2| \cdot |2x+4| = 10$ olduğuna
 göre, x^2 kaçtır?

Öğren

$$|x-2| \cdot |2x+4| = 10$$

$$|(x-2)(x+2)| = 5$$

$$|x^2-4| = 5$$

$$x^2-4 = 5$$

$$x^2-4 = -5$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = -1$$

x^2 değeri sıfırdan küçük
 olamayacağı için $x^2 = 9$ olur.

Çöz

$x < y$ olmak üzere,
 $\sqrt{4x^2 - 8xy + 4y^2} = 8$ olduğuna
 göre y 'nin x türünden eşitini
 bulunuz.

Öğren

$$\sqrt{4x^2 - 8xy + 4y^2} = 8$$

$$\sqrt{(2x-2y)^2} = 8$$

Kök derecesi çift olduğundan sa-
 yı kök dışına mutlak değer
 içinde çıkar.

$$|2x-2y| = 8 \text{ elde edilir.}$$

$$x < y \Rightarrow x-y < 0 \text{ olduğundan,}$$

$2x-2y$ ifadesi negatiftir.

$$|2x-2y| = 8 \Rightarrow -2x+2y = 8$$

$$2y = 8+2x$$

$$y = 4+x \text{ elde edilir.}$$

ÇÖZ

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < 7 \text{ ve } 2x-y=4$$

olduğuna göre y 'nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaç-
tır?

ÖĞREN

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < 7$$

$$-7 < \frac{x-1}{2} < 7$$

$$-14 < x-1 < 14$$

$-13 < x < 15$ olur. Aralıktaki bilinmeyen değer, eşitlikte yalnız bırakılırsa;

$$2x-y=4$$

$$2x=y+4$$

$$x = \frac{y+4}{2} \text{ olur. Bulunan } x \text{ değeri}$$

eşitsizlikte yerine konulursa;

$$-13 < x < 15$$

$$-13 < \frac{y+4}{2} < 15$$

$$-26 < y+4 < 30$$

$-30 < y < 26$ olur. Buna göre y 'nin alabileceği değerler toplamı;

$$-29-28-27-26-25 \dots +24+25 \text{ 'tir}$$

-25 ile $+25$ arasındaki sayıların toplamı 0 olacağından geriye,

$-29-28-27-26$ kalır ve bu sayıların toplamı da -110 bulunur.

ÇÖZ

$$\frac{24}{|x-3|+|4x-20|} \text{ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?}$$

ÖĞREN

Rasyonel bir ifadenin en büyük değerini alması için pay-
danın en küçük değeri alması
gerekir. Yani;

$|x-3|+|4x-20|$ ifadesi en
küçük olmalıdır.

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ olur. Bu değer
ifade de yerine yazılırsa;

$$|3-3|+|4 \cdot 3-20|=|0|+|-8|$$

$$=8 \text{ elde edilir.}$$

$4x-20=0 \Rightarrow x=5$ olur. Bu de-
ğer ifade de yerine yazılırsa;

$$|5-3|+|4 \cdot 5-20|=|2|+|0|$$

$$=2 \text{ elde edilir.}$$

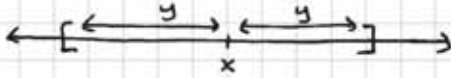
Buna göre $|x-3|+|4x-20|$
ifadesinin en küçük değeri
2'dir. Bu değer sorulan
ifade de yerine yazılırsa;

$$\frac{24}{|x-3|+|4x-20|} = \frac{24}{2} = 12$$

ifadesinin alabileceği en
büyük değer olur.

ÇÖZ

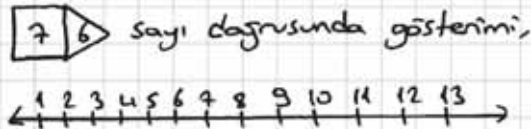
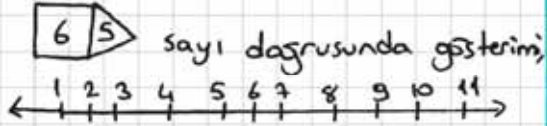
Sayı doğrusu üzerinde bir x sayısına uzaklığı en fazla y birim olan sayıların belirttiği bölge $\boxed{x} \triangleright y$ ile gösteriliyor.



Buna göre, $\boxed{6} \triangleright 5$ ve $\boxed{7} \triangleright 6$ bölgelerinin her ikisinde de bulunan noktalar kümesi $\boxed{a} \triangleright b$ ile gösterildiğine göre $a+b$ kaçtır?

ÖĞREN

$\boxed{x} \triangleright y \Rightarrow$ bunun anlamı x noktasını sayı doğrusuna sabitle ve y birim sağa ve y birim sola git.



Her ikisinde de ortak olan noktalar "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11" dir.

Bunlar ise $\boxed{6} \triangleright 5$ ile ifade edilir.

$6+5=11$ olarak bulunur.

ÇÖZ

x, y ve z tam sayıları için,

$$|x-y|=6$$

$$|y+z|=4$$

$$|z-3|=0$$

Buna göre x 'in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$|z-3|=0$ ise $z=3$ olur.

$|y+z|=4$ ise z 'yi yerine yazalım.

$$|y+3|=4 \begin{cases} y+3=4 \Rightarrow y=1 \\ y+3=-4 \Rightarrow y=-7 \end{cases}$$

$|x-y|=6$ ise bulunan y değerini yerine yazalım.

$$|x-1|=6 \quad \text{ve} \quad |x+7|=6$$

$$\begin{array}{ll} x-1=6 & x-1=-6 \\ x=7 & x=-5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} x+7=6 & x+7=-6 \\ x=-1 & x=-13 \end{array}$$

x değerlerinin toplamı

$$7+(-5)+(-1)+(-13)$$

$$=12 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$$\frac{|x|}{3+|x|} < \frac{6}{7}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

ÖĞREN

$$\frac{|x|}{3+|x|} < \frac{6}{7} \text{ ipler dışlar çarpımı yapalım.}$$

$$7|x| < 18 + 6|x|$$

$$7|x| - 6|x| < 18$$

$$|x| < 18$$

$$-18 < x < 18$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ -17, -16, -15, \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 17 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{17 \text{ tane}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{17 \text{ tane}} \end{array}$$

$$17 + 17 + 1 = 35 \text{ tane } x \text{ vardır.}$$

"Başlamak için mükemmel olmak zorunda değilsin; fakat

mükemmel olmak için başlamak zorundasın."

Zig Ziglar

ÇÖZ

Sıfırdan farklı x ve y gerçel sayıları için,

$$\left| \frac{x}{3} \right| = -x \cdot y$$

$$\left| \frac{y}{x} \right| = 4y$$

eşitlikleri veriliyor. Buna göre, $x+y$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

Mutlak değer özelliğini

hatırlayacak olursak

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y| \text{ 'den}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{x}{3} \right| = -xy \\ \left| \frac{y}{x} \right| = 4y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ifadelerini taraf} \\ \text{tarafa çarparsak.} \end{array}$$

$$\left| \frac{x}{3} \right| \cdot \left| \frac{y}{x} \right| = -4xy^2$$

$$\left| \frac{x}{3} \cdot \frac{y}{x} \right| = -4xy^2$$

$$\left| \frac{y}{3} \right| = -4xy^2 \Rightarrow \frac{y}{3} = -4xy^2$$

$$\frac{1}{3} = -4xy \Rightarrow -xy = \frac{1}{12}$$

$$\left| \frac{x}{3} \right| = -xy \quad \left| \frac{x}{3} \right| = \frac{1}{12}$$

$$-\frac{x}{2} = \frac{1}{12} \quad x = -\frac{1}{6} \text{ olur.}$$

$$-x \cdot y = \frac{1}{12} \quad -\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot y = \frac{1}{12}$$

$$y = \frac{1}{2} \quad x+y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

1. $x < y < 0 < z$ olmak üzere,

$$\frac{|x-z|}{x-z} - \frac{|y-z|}{y-z} + \frac{|z|}{z}$$

ifadesinin eşiti nedir?

- A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

2. $a < 0 < b$ olmak üzere,

$|b-2a| + |4a-b|$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) $6a$
B) $6a-2b$
C) $-6a$
D) $2b+2a$
E) $2b-6a$

3. a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere, $|4a-3b| + |2b-3c| = 0$ denkleminde göre, $a+b+c$ toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- A) 19
B) 21
C) 23
D) 27
E) 29

4. $|a| + 3a = 12$ denklemini sağlayan a değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{3\}$
B) $\{6\}$
C) $\{3, 6\}$
D) $\{3, 4, 6\}$
E) $\{4, 6\}$

sozlöji

Cevap Performansı

1	2	3	4
D	E	E	A
E	A	B	C
A	B	C	D
B	C	D	E
C	D	A	B

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
D, E, E, A

ÜSLÜ SAYILAR

* a bir reel sayı ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere n tane a 'nın çarpımına a 'nın n . üssü denir.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tane}} = a^n$$

$a \rightarrow \text{taban}$, $n \rightarrow \text{üst (kuvvet)}$

UYARI

$$\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ tane}} = a \cdot n$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tane}} = a^n$$

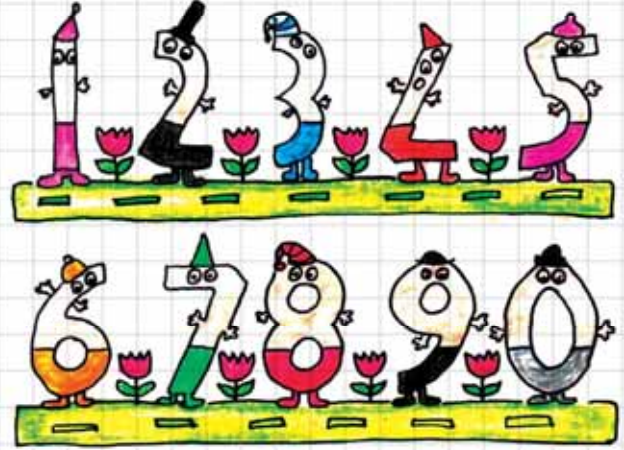
Pozitif sayıların bütün kuvvetleri yine pozitiftir.

Negatif sayıların ise çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri negatiftir.

ÖRNEK $2^2 = 4$, $(-2)^3 = -8$,
 $(-2)^4 = 16$ Ancak bu ikisini karıştırmayalım;
 $(2^4) \neq -2^4 \rightarrow 16 \neq -16$

Üslü Sayıların Özellikleri

- ✓ Sıfır haricindeki tüm reel sayıların sıfırıncı kuvveti 1'dir.
- ✓ $0^0 = \text{belirsizdir}$.
- ✓ 1'in tüm reel kuvvetleri 1'dir.
- ✓ $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ($a > 0$)



$$\checkmark a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\checkmark \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Üslü Sayılarda İşlemler

Çarpma:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

ÖRNEK $9^2 \cdot 3^5 = 3^4 \cdot 3^5$
 $= 3^9$
 $2^2 \cdot 3^2 = 6^2$



UYARI

Bazı durumlarda tersi işlemlerde yapılmalıdır.

$$15^5 = 3^5 \cdot 5^5$$

$$2^{a+2} = 2^a \cdot 2^2$$

Bölme:

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

ÖRNEK

$$\frac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5$$

$$\frac{6^7}{2^7} = \left(\frac{6}{2}\right)^7 = 3^7$$

**Toplama - Çıkarma:**

Tabanları ve üstleri aynı olan üslü ifadeler toplanıp çıkarılabilir.

$$a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = (a+b-c) \cdot x^n$$

İfadelerde Eşitlik Durumu

✓ Bir birine eşit olan iki üslü ifadenin tabanları eşit ise üstleri de eşittir.

$$a^m = a^n \rightarrow m=n \quad (a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1)$$

✓ Üstleri eşit olan üslü denklemlerde üst tek sayı ise tabanlar eşit, üst çift sayı ise tabanlar mutlak değerce eşittir.

$$a^n = b^n \rightarrow \begin{cases} a=b & n \text{ tek sayı} \\ a=b \\ a=-b & n \text{ çift sayı} \end{cases}$$

UYARI

* $a^n = 1$ şeklindeki denklemlerin çözümünde aşağıdaki üç durum incelenir.

1) $n=0$ ve $a \neq 0$

2) $a=1$

3) $a=-1$ ve n çift tam sayı

* $a^x = b^y$ ve a, b sayıları aralarında asal ise $x=y=0$

* $a^n = b^x$ ve $a^m = b^y$ biçimindeki eşitliklerde a ve b aralarında asal olmak şartıyla

$$\frac{n}{m} = \frac{x}{y} \text{ olur.}$$

Üslü Eşitsizlikler

✓ $a > 1$ olmak üzere $a^n < a^m \rightarrow n < m$

✓ $0 < a < 1$ olmak üzere $a^n < a^m \rightarrow n > m$

ÇÖZ

$5^{4x-2} = 625$ olduğuna göre, x kaçtır?

ÖĞREN

$$5^{4x-2} = (25)^2$$

$$5^{4x-2} = (5^2)^2 \Rightarrow 5^{4x-2} = 5^4$$

$$4x-2=4$$

$$4x=6 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

UYARI

Negatif bir sayının art arda kuvvetleri alınacaksa; Kural 1'e göre işareti belirlendikten sonra üsler çarpılır.

$(-3^5)^2 \rightarrow$ Parantez kuvveti çift olduğundan sonuç pozitif olacaktır. Yani;

$$(-3^5)^2 \rightarrow \text{çift} = 3^{10} \text{ olur.}$$

$$(-5^4)^3 \rightarrow \text{tek} = -5^{12} \text{ olur.}$$

Çöz

$$\frac{(-a^{-2})^5 \cdot (-a^3)^4 \cdot (-a^2)}{(-a^{-2})^3 \cdot (-a^3)^2}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

ÖĞREN

Negatif bir sayının art arda kuvvetleri alınırken önce işareti belirlenir.

$$\frac{(-a^{-2})^5 \cdot (-a^3)^4 \cdot (-a^2)^1}{(-a^{-2})^3 \cdot (-a^3)^2}$$

$$= \frac{-a^{-10} \cdot a^{12} \cdot -a^2}{-a^{-6} \cdot a^6}$$

$$= \frac{a^{-10+12+2}}{-a^{-6+6}} = \frac{a^4}{-a^0}$$

$$= \frac{a^4}{-1} = -a^4 \text{ elde edilir.}$$

Çöz

$$\frac{2^{9x} + 2^{6x} + 2^{3x}}{2^x + 2^{4x} + 2^{7x}} = 64 \text{ olduğu}$$

na göre, x kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{2^{9x} + 2^{6x} + 2^{3x}}{2^x + 2^{4x} + 2^{7x}} = 64$$

Pay kısmında üssü en küçük olan ifadeden payda kısmında üssü en küçük olan ifade ortak tabanda çıkarılır.

$$2^{3x-x} = 64 \quad 2x=6 \\ x=3 \text{ olur.}$$

Çöz

$$2^x = a$$

$$3^x = b$$

$$5^x = c$$

olduğuna göre $(300)^x$ ifadesinin a, b ve c türünden eşitini bulunuz.

ÖĞREN

$(300)^x$ ifadesi çarpanlarına ayrılırsa;

$$(300)^x = (2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2)^x \\ = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^{2x} \\ = (2^x)^2 \cdot 3^x \cdot (5^x)^2 \text{ olur.}$$

Verilen ifadeler yerine yazılırsa;

$$(300)^x = (2^x)^2 \cdot 3^x \cdot (5^x)^2 \\ = a^2 \cdot b \cdot c^2 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

x ve y birer tam sayı olmak üzere;
 $3^{2x+y-4} = 7^{x-y-8}$ eşitliğini sağ-
 layan x ve y değerleri için
 $x \cdot y$ kaçtır?

ÖĞREN

Tabanlar asal olduğu için bu
 eşitlik yalnız üslerin sıfır olduğu
 durumda sağlanır.

$2x+y-4=0$ ve $x-y-8=0$ olmalı.
 İfadeler taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{array}{r} 2x+y-4=0 \\ + \quad x-y-8=0 \\ \hline 3x-12=0 \quad 3x=12 \quad x=4 \text{ olur.} \end{array}$$

x değeri denklemlerin herhangi
 birinde yerine konularak y
 değeri bulunur.

$$x-y-8=0 \Rightarrow 4-y-8=0 \\ y=-4 \text{ olur.}$$

O hâlde, $x \cdot y = 4 \cdot (-4) = -16$ olur.



NOT

"Sayısı kaç basamaklıdır."
 sorularında verilen ifade düzen-
 lenerek $2^n \cdot 5^n$ (yani 10^n) ($n \in \mathbb{Z}$)
 ifadesi elde edilmeye çalışılır.
 (sayı). (10^n) ifadesinin basamak
 sayısı;

(sayının basamak sayısı) + n 'dir.

Örneğin;

$$1907 \cdot 10^{31} \text{ sayısı } 4 + 31 = 35 \text{ bas.}$$

$$12 \cdot 10^7 \text{ sayısı } 2 + 7 = 9 \text{ bas.}$$

Üslü Sayılarda Sıralama

1) Tabanları eşit olan üslü
 sayılar sıralanırken kuvveti
 büyük olan ifade daha büyüktür.

Örneğin;

2^3 ve 2^5 sayılarının tabanları
 aynı olduğu için kuvveti bü-
 yük olan daha büyüktür.

Dolayısıyla $2^5 > 2^3$ olur.

2) Kuvvetleri eşit olan sa-
 yılar sıralanırken tabanı bü-
 yük olan ifade daha büyüktür.

Örneğin;

3^4 ve 5^4 sayılarının kuvvet-
 leri aynı olduğu için tabanı
 büyük olan daha büyüktür.
 Dolayısıyla $5^4 > 3^4$ olur.

"Birleşip yükselmek,
 yükselip birleşmekten
 daha iyidir!!!"

Matematiksel İspat:

$$2^3 + 4^3 = 72 \quad (2+4)^3 = 216$$

Çöz

$$5^x = 15$$

$$3^y = 31$$

$$7^z = 68$$

olduğuna göre x, y, z 'yi büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

ÖĞREN

$5^x = 15$ ifadesinde 15 sayısı, 5'in 1. kuvveti ile 2. kuvveti arasındadır. Yani;

$$5 < 15 < 25 \Rightarrow 5^1 < 15 < 5^2$$

$$5^1 < 5^x < 5^2$$

$$1 < x < 2 \text{ olur.}$$

$3^y = 31$ ifadesinde 31 sayısı, 3'ün 3. kuvveti ile 4. kuvveti arasındadır. Yani;

$$27 < 31 < 81 \Rightarrow 3^3 < 31 < 3^4$$

$$3^3 < 3^y < 3^4$$

$$3 < y < 4 \text{ olur.}$$

$7^z = 68$ ifadesinde 68 sayısı, 7'nin 2. kuvveti ile 3. kuvveti arasındadır. Yani;

$$49 < 68 < 343 \Rightarrow 7^2 < 68 < 7^3$$

$$7^2 < 7^z < 7^3$$

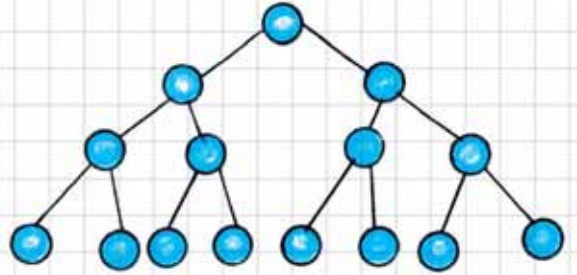
$$2 < z < 3 \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$y > z > x \text{ veya } x < z < y \text{ olur.}$$

Çöz

Bir bakteri kolonisindeki bir bakteri bir saat içerisinde ikiye bölünerek çoğalıyor ve üçüncü saatin sonunda 8 bakteri oluyor.



Başlangıçtan itibaren bu bakteri her saatin sonunda ikiye değilse üçe bölünseydi beşinci saatin sonunda kaç tane bakteri olurdu?

ÖĞREN

Verilen örnekte bakteriler sürekli ikiye bölünür. 3. saatin sonunda 8 bakteri oluyor. Yani;

$$2^3 = 8$$

Eğer 3'e bölünseydi 5. saatin sonunda;

$$3^1 \rightarrow 1. \text{ saatin sonu}$$

$$3^2 \rightarrow 2. \text{ saatin sonu}$$

$$3^3 \rightarrow 3. \text{ saatin sonu}$$

$$3^4 \rightarrow 4. \text{ saatin sonu}$$

$$3^5 \rightarrow 5. \text{ saatin sonu}$$

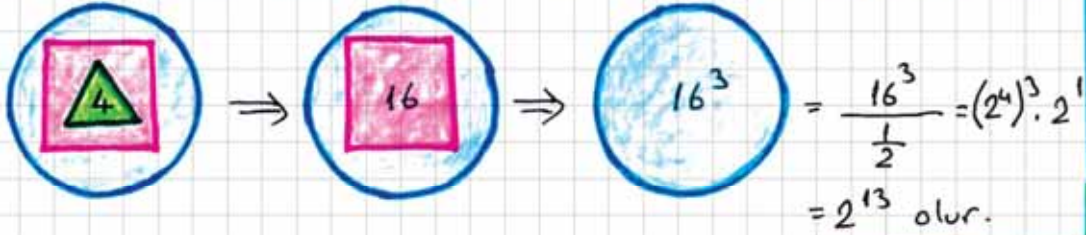
ÇÖZ

Zeynep ve İpek aşağıdaki kurallara göre bir oyun oynuyorlar ve bu oyun için Δ , $\square$, $\bigcirc$ şekillerini kullanıyorlar.

- * $\Delta \rightarrow$ içine giren sayının karesini alıyor.
- * $\square \rightarrow$ içine giren sayının küpünü alıyor.
- * $\bigcirc \rightarrow$ içine giren sayıyı yarıma bölüp çıkarıyor.

İpek, kardeşi Zeynep'e 4 sayısını veriyor ve sırası ile Δ , $\square$, $\bigcirc$ içerisinden geçirmesini istiyor. Buna göre Zeynep'in en son elde ettiği sayı kaçtır?

ÖĞREN



ÇÖZ

Bir bakteri kültüründe ilk başta 2^n tane bakteri var. Her bir saatin sonunda bakteri sayısı 2 katına çıkıyor. 8 saat sonra bakteri sayısı 2048 olduğuna göre ilk başta kaç tane bakteri vardır?

ÖĞREN

$$1 \longrightarrow 2^{n+1} \text{ (Birinci saatin sonu)}$$

$$2 \longrightarrow 2^{n+2} \text{ (ikinci saatin sonu)}$$

$$3 \longrightarrow 2^{n+3} \text{ (Üçüncü saatin sonu)}$$

⋮

$$8 \longrightarrow 2^{n+8} \text{ (Sekizinci saatin sonu)}$$

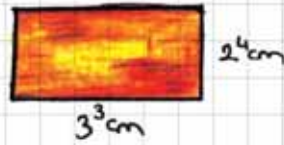
$$2^{n+8} = 2048$$

$$2^{n+8} = 2^4 \Rightarrow n+8=4 \quad n=3$$

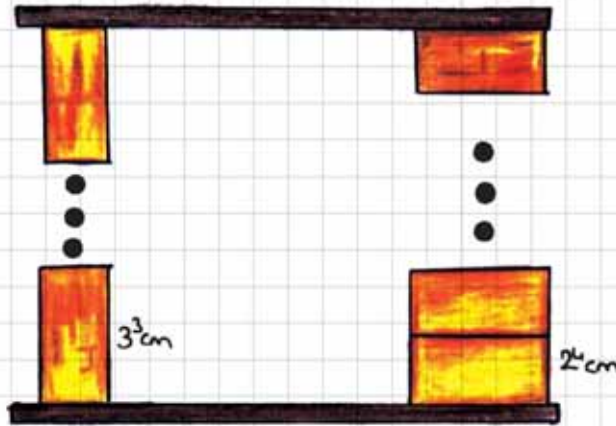
$$2^n \text{ (başlangıçtaki bakteri sayısı)}$$

$$2^3 = 8 \text{ tane.}$$

ÇÖZ



Yukarıda verilen kare dik prizma şeklindeki kiremit herhangi bir yüzeyi üzerine üst üste konularak bir duvar örülüyor.



Şekildeki duvarın sol kenarına 64 tane tuğla üst üste konularak üst kolon ile birleştiriliyor. Buna göre sağ kenarına koyulan tuğlalardan kaç tane üst üste konularak üst kolon ile birleştirilir?

ÖĞREN

Sol kenara 64 tane üst üste konuluyor ise duvarın yüksekliği, $64 \cdot 3^3$ cm olur.

Sağ kenarıda aynı yükseklikte olacağından ve koyulan tuğlaların yüksekliği de 2^4 cm olduğundan,

$$\frac{64 \cdot 3^3}{2^4} = 2^6 \cdot 2^{-4} \cdot 3^3$$

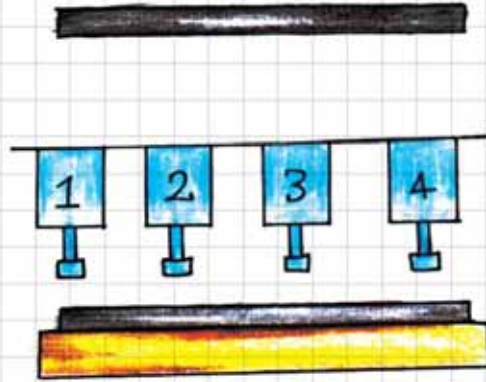
$$= 4 \cdot 27$$

$$= 108 \text{ tane tuğla üst üste konulmalı.}$$

FÖZ

İşleme, düzeltme, onarma gibi işlemlerin uygulanması sırasında kullanılan, mekanik ya da hidrolik bir kumandayla birbirine yaklaşan ve aralarına konan şeyi sıkıştırmaya yarayan iki tablodan oluşan sıkıştırma aracına baskı (pres) makinası denir.

Aşağıdaki metal çubuk dört farklı pres makinasından işleme sokulduktan sonra hazır hale geliyor.



- * 1. makinanın gücü $18 \cdot 6^8$ newtondur.
- * 2. makinanın gücü $12 \cdot 18^3$ newtondur.
- * 3. makinanın gücü $36 \cdot 12^4$ newtondur.
- * 4. makinanın gücü $24 \cdot 18^2$ newtondur.

Yukarıdaki gibi her başlığının gücü farklı olan pres makinalarına çubuk yerleştiriliyor. Metal çubuk düz bir şekilde pres makinasından çıkması için her bir başlığın gücü kaç newton arttırılmalıdır?

ÖĞREN

1. makina 2 newton, 2. makina $2^5 \cdot 3^2$ newton, 3. makina 3^3 newton, 4. makina $2^3 \cdot 3^4$ newton arttırılırsa her birinin gücü eşitlenmiş olur.

$$1. \text{ makinanın gücü } 18 \cdot 6^8 = 6 \cdot 3 \cdot 6^8 = 2 \cdot 3 \cdot 2^8 \cdot 3^8 = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2 = 2^{10} \cdot 3^9$$

$$2. \text{ makinanın gücü } 12 \cdot 18^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 6^3 \cdot 3^3 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot 2^3 = 3^7 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 3^2 = 2^{10} \cdot 3^9$$

$$3. \text{ makinanın gücü } 36 \cdot 12^4 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^4 \cdot 3^4 = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 3^3 = 2^{10} \cdot 3^9$$

$$4. \text{ makinanın gücü } 24 \cdot 18^2 = 6 \cdot 4 \cdot 9^2 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^2 = 3^5 \cdot 2^5 \cdot 3^4 \cdot 2^5 = 2^{10} \cdot 3^9$$

1. n tane 3^5 sayısının çarpımı
A: 3^n tane 3^n sayısının toplamı
B'dir. Buna göre $\frac{A}{B}$ oranı kaç-
tır?
A) 3^n
B) 3^{2n}
C) 3^{3n}
D) 3^{n+5}
E) 3^{5n-n^2}

2. $(0,04)^{x+1} = (125)^{x-1}$ eşitliğini
sağlayan x değeri kaçtır?
A) 1
B) $\frac{3}{5}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{5}$
E) 0,1

3. $3^{5x} = 32$ olduğuna göre, 9^{x-1}
ifadesinin değeri kaçtır?
A) $\frac{9}{4}$
B) 2
C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{4}{9}$
E) $\frac{2}{3}$

4. a doğal sayı olmak üzere, $X = 2^{4a}$
ve $Y = (25)^{2a+1}$ eşitlikleri veri-
liyor. $X \cdot Y$ çarpımı on sekiz ba-
samaklı bir doğal sayı olduğuna
göre, a sayısı aşağıdakilerden
hangisidir?
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

SORUÇÖZÜMÜ

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	D	D	B
D	E	A	C
E	A	B	D
A	B	C	E
B	C	E	A

Performansını görmek için
cevaplarını işaretleyip, arabırını
çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
C, D, D, B

KÖKLÜ SAYILAR

* n , 1'den büyük pozitif tam sayı olmak üzere $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklinde gösterilir.

* $\sqrt[n]{x}$ ifadesinin reel sayı belirtmesi için,

n çift ise $x \geq 0$ olmalıdır.

n tek ise $x \in \mathbb{R}$ olabilir.

* $\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$

* $\sqrt[n]{x^n} \Rightarrow x$, n tek sayı ise
 $\Rightarrow |x|$, n çift sayı ise

Köklü Sayılarda İşlemler

Toplama - Çıkarma:

$$a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} - c\sqrt[n]{x} = (a+b-c)\sqrt[n]{x}$$

Çarpma:

Çarpma işlemi yapabilmek için kök derecelerinin aynı olması gerekir.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} &= 10\sqrt{4} \\ &= 10 \cdot 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$



Bölme:

Bölme işlemi yapabilmek için, kök derecelerinin aynı olması gerekiyor.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$



ÖRNEK

$$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$$



UYARI

Çarpma ve Bölme işlemi yapılırken kök dereceleri eşit değilse öncelikle genişletme ve sadeleştirme yöntemi ile kök dereceleri eşitlenmeli ve daha sonra işlem yapılmalıdır.

Eşlenik Çarpımı:

Kesirli ifadelerde payda köklü bir sayı ise, paydayı kökten kurtarma işlemine paydayı rasyonel yapma denir. Bu işlemde eşlenik kavramı ile olur.

$$\sqrt{a} \xrightarrow{\text{eşlenişi}} \sqrt{a}, \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

ÖRNEK

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} \text{ eslenisi} &\rightarrow \sqrt{a-b} \\ (\sqrt{a+b}) \cdot (\sqrt{a-b}) & \\ = (\sqrt{a^2 - b^2}) & \\ = a-b & \end{aligned}$$



ÇÖZ

$$\sqrt[6]{16^{2x-1}} = 64$$

olduğuna göre, x kaçtır?

ÖĞREN

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ özelliğinden yararlanılırsa;

$$\sqrt[6]{16^{2x-1}} = 64$$

$$16^{\frac{2x-1}{6}} = 2^6$$

$$2^{\frac{8x-4}{6}} = 2^6$$

$$\frac{8x-4}{6} = 6$$

$$8x-4 = 36$$

$$8x = 40$$

$$x = 5 \text{ bulunur.}$$



UYARI

$a > 0$ olmak üzere $\sqrt[n]{a^m}$ ifadesinin kök derecesine uygulanan işlemin aynısı kök içindeki sayının kuvvetine de uygulanır. Kök derecesi bir k sayısı ile çarpılır veya bölünürse;

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} \rightarrow \text{genişletme}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}} \rightarrow \text{sadeleştirme}$$

elde edilir.



Aynı kök içinde toplama veya çıkarma işlemi varsa bu ifadeler ayrı ayrı kök dışına çıkarılmaz.

Önce toplanır veya çıkarılır. Daha sonra kök dışına çıkarılabiliyorsa kök dışına çıkarılır.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

DİKKAT ET

ÇÖZ

$$\frac{2\sqrt{8} + 3\sqrt{32}}{\sqrt{2}} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

ÖĞREN

Köklü sayılarda toplama-çıkarma yapmak için kök içleri ve kök dereceleri aynı olmalıdır. Kök içleri aynı olmadığından verilen ifadeler parçalanıp kök dışına çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{8} + 3\sqrt{32}}{\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{4 \cdot 2} + 3\sqrt{16 \cdot 2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(4+12) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16 \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

ÇÖZ

$$4\sqrt{32a} + 5\sqrt{50a} - 7\sqrt{18a} = 80\sqrt{2}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

ÖĞREN

$$4\sqrt{32a} + 5\sqrt{50a} - 7\sqrt{18a} = 80\sqrt{2} \text{ ise;}$$

$$4\sqrt{16 \cdot 2a} + 5\sqrt{25 \cdot 2a} - 7\sqrt{9 \cdot 2a} = 80\sqrt{2}$$

$$4 \cdot 4\sqrt{2a} + 5 \cdot 5\sqrt{2a} - 7 \cdot 3\sqrt{2a} = 80\sqrt{2}$$

$$16\sqrt{2a} + 25\sqrt{2a} - 21\sqrt{2a} = 80\sqrt{2}$$

$$(16 + 25 - 21) \cdot \sqrt{2a} = 80\sqrt{2}$$

$$20\sqrt{2a} = 80\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a} = 4\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2a})^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$2a = 32 \quad a = 16 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2}{\sqrt{2} + 1}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

İç içe kökler:

$$1) \sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[n \cdot m \cdot p]{a} \text{ 'dır.}$$

Örneğin;

$$3\sqrt{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3 \cdot 4]{5} = \sqrt[12]{5} \text{ olur.}$$

$$\bullet \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{b} \sqrt[p]{c} = \sqrt[n \cdot m \cdot p]{a^m \cdot b^p \cdot c^n} \text{ 'dır.}$$

ÇÖZ

$$\frac{3\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt[12]{2}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{3\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt[12]{2}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \sqrt{2^{2 \cdot 2} \cdot 2^2 \cdot 2}}{\sqrt[12]{2}}$$

$$= \frac{12\sqrt{2^4 \cdot 2^2 \cdot 2}}{\sqrt[12]{2}}$$

$$= \frac{12\sqrt{2^7}}{\sqrt[12]{2}}$$

$$= \sqrt[12]{\frac{2^7}{2}}$$

$$= \sqrt[12]{2^6}$$

$$= \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Sonsuza Giden İç İç Kökler:

$$2) \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \dots}}} = \sqrt[n+1]{a} \text{ 'dır.}$$

Örneğin:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{81 : 3\sqrt{81 : 3\sqrt{81 : \dots}}} &= \sqrt[3+1]{81} \\ &= \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$3) \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{a \dots}}} = \sqrt[n+1]{a} \text{ 'dır.}$$

Örneğin:

$$\sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \dots}}} = \sqrt{2+1}{5} = 5 \text{ 'dır.}$$

4) a ardışık iki sayının çarpımı olmak üzere;

• $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$ ifadesinin sonucu, a'nın ardışık çarpanlarından büyük olanıdır.

• $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}}$ ifadesinin sonucunda, a'nın ardışık çarpanlarının küçük olanıdır.

Örneğin:

$$\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 \dots}}} = 6 \text{ olur.}$$

5 6 Büyük olan

$$\sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 \dots}}} = 3 \text{ olur.}$$

Küçük olan 3 4

ÇÖZ

$$\sqrt{2x + \sqrt{2x + \sqrt{2x \dots}}} = 10$$

olduğuna göre x kaçtır?

ÖĞREN

$$\sqrt{2x + \sqrt{2x + \sqrt{2x \dots}}} = 10$$

ifadesinde $2x$ ardışık iki tam sayının çarpımı biçiminde yazılabiliyorsa sonuç büyük olan sayıdır. Yani, 10'dur.

O hâlde;

$$2x = 9 \cdot 10$$

$$2x = 90 \quad x = 45 \text{ olur.}$$

5) $\sqrt{a + 2\sqrt{b}}$ biçimindeki bir ifade de, $b = x \cdot y$, $a = x + y$ olacak biçimde $x, y \in \mathbb{R}^+$ ve $x > y$ olmak üzere;

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ 'dır.}$$

Örneğin:

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$$

5+1 5 1

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

5+3 5 3

$$\sqrt{7 + \sqrt{40}} = \sqrt{7 + \sqrt{4 \cdot 10}}$$

$$= \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} + \sqrt{2} \text{ olur.}$$

5+2 5 2

ÇÖZ

$$\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}} + \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5-3}} + \frac{1}{\sqrt{5+3}}$$

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \quad (\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

Köklü Sayılarda Sıralama

Kök dereceleri eşit olan köklü ifadeler sıralanırken kök içindeki sayılardan büyük olan en büyüktür.

$$a > b > c \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}$$

ÇÖZ

$$\sqrt[6]{12-2\sqrt{20}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10}+\sqrt{2}} \text{ işleminin sonucu kaçtır?}$$

ÖĞREN

$$\sqrt[6]{12-2\sqrt{20}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{12-2\sqrt{20}}} \text{ şeklinde yazalım.}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{12-2\sqrt{20}}} = \sqrt[3]{\sqrt{10-2}} \text{ şeklinde kök dışına çıkar.}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{10-2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10+2}} \text{ çarpımını aynı kök içinde yazalım.}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{10-2}) \cdot (\sqrt{10+2})} = \sqrt[3]{10-2} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

ÇÖZ

$a = \sqrt[4]{2}$, $b = \sqrt[4]{3}$ ve $c = \sqrt[4]{5}$ olduğuna göre; a, b, c sayılarının küçükten büyüğe sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

ÖĞREN

Verilen köklü ifadelerin kök dereceleri eşitlenir.

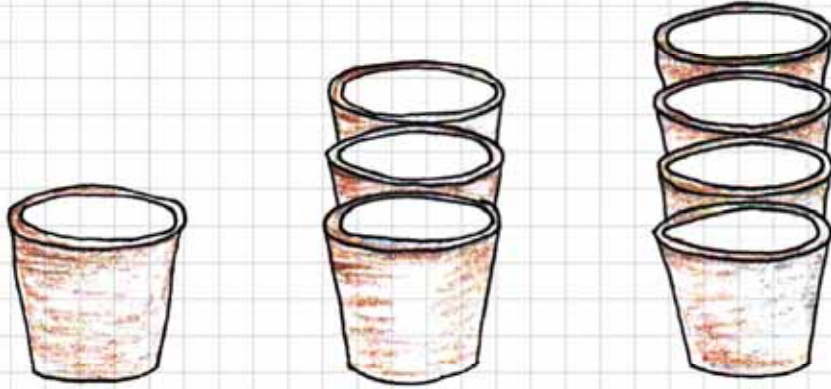
$$a = \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

$$b = \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$$c = \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

Kök dereceleri eşit olan köklü sayılarda kök içi büyük olan ifade daha büyük olacağından sıralama $a > b > c$ veya $c < b < a$ olur.

FÖZ



Yukarıdaki karton bardaklar üst üste koyularak bardak kuleleri oluşturulmak isteniyor.

* Birinci şekildeki bardağın boyu $\sqrt{12}$ cm'dir.

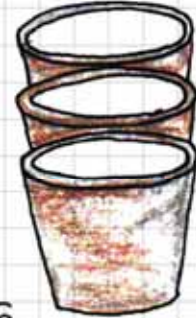
* İkinci şekildeki bardağın boyu $\sqrt{48}$ cm'dir.

Buna göre 3. şekildeki bardakların boyunun birinci şekildeki bardakların boyunun 5 katı olması için kaç tane bardak üst üste konulmalıdır?

ÖĞREN

Birinci bardağın boyu $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

İkinci şekildeki bardakların boyu $= 4\sqrt{3}$ cm



Birinci bardağın boyu $2\sqrt{3}$ ise $2\sqrt{3} \cdot 5 = 10\sqrt{3}$

Yani üçüncü şekildeki bardakların boyu $10\sqrt{3}$ cm olmalı.

İlk koyulan bardağın boyu $2\sqrt{3}$ cm, üstüne koyulan her bir bardak $\sqrt{3}$ cm arttığından,

$$2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

Yani ilk bardak dahil olmak üzere 9 tane bardak üst üste konulmalıdır.

1. $\sqrt{2009 \cdot 2011 + 1}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) 2006
- B) 2007
- C) 2008
- D) 2009
- E) 2010

2. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$, $c = \sqrt[4]{5}$ sayıları arasındaki sıralama aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $c < b < a$
- B) $a < b < c$
- C) $b < a < c$
- D) $c < a < b$
- E) $a < c < b$

3. $\sqrt[4]{7 - \sqrt{48}} \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ çarpımının sonucu kaçtır?

- A) $2 - \sqrt{2}$
- B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- C) $\sqrt{2}$
- D) 1
- E) 2

4. $\frac{1}{\sqrt{0,08}} + \frac{2}{\sqrt{0,32}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\sqrt{2}$
- B) $2\sqrt{2}$
- C) $3\sqrt{2}$
- D) $4\sqrt{2}$
- E) $5\sqrt{2}$

5. $\frac{\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt[4]{125}}{\sqrt{5}}$ işleminin sonucu kaçtır?

- A) $\sqrt{5}$
- B) $\sqrt{2}$
- C) 1
- D) 0
- E) -1

6. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 3$ olduğuna göre,

$\frac{a}{b}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{4}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 2
- D) 4
- E) 6

Soru Çözümü

Cevap Performansı

1	2	3	4	5	6
E	B	D	E	D	D
A	C	E	B	B	A
B	D	A	C	A	C
C	E	B	D	C	E
D	A	C	A	E	B

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyin, aralarını çizgi ile birleştirin.

Doğru Cevaplar

E, B, D, E, D, D

ÇARPANLARA AYIRMA VE ÖZDEŞLİKLER

Ortak Çarpan Parantezine Alma

Verilen ifadelerin her birinde ortak bir çarpan varsa; ifadeler ortak çarpan parantezine alınır.

Örneğin;

$$5x - 10y = 5 \cdot (x - 2y)$$

$$3x^2y - 4xy^2 = x \cdot y \cdot (3x - 4y) \text{ 'dir.}$$

ÇÖZ

$3ab - bc + 3ac - c^2$ ifadesinin çarpanlarından birini bulunuz.

ÖĞREN

Verilen ifadelerde ortak çarpanı olan ifadeler düzenlenerek ortak çarpan parantezine alınır.

$$3ab - bc + 3ac - c^2$$

$$= b \cdot (3a - c) + c \cdot (3a - c)$$

$$= (3a - c) \cdot (b + c) \text{ elde edilir.}$$

ifadenin çarpanları, $3a - c$ ve $b + c$ 'dir.

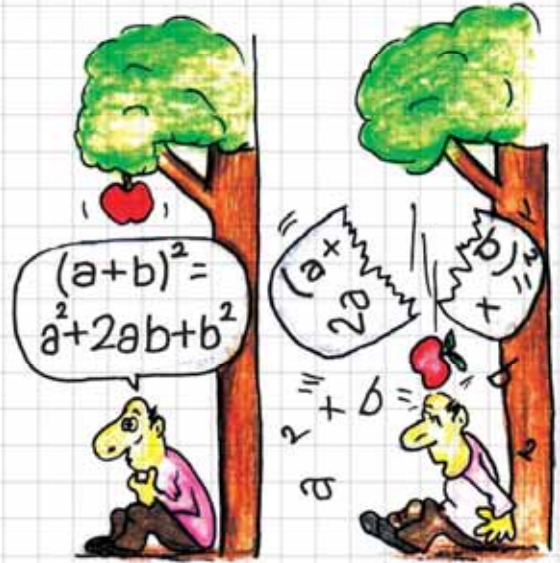
ÖZDEŞLİKLER

Tam Kare Özdeşliği

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \right\} \text{Düzenlenirse;}$$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \text{ elde edilir.}$$



ÇÖZ

$x - \frac{1}{x} = 4$ olduğuna göre,

$x^2 + \frac{1}{x^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÖĞREN

İstenen ifade $(x^2 + \frac{1}{x^2})$, verilen ifadenin $(x - \frac{1}{x})$ karesinden 2 fazla olduğu için verilen ifadenin her iki tarafının karesi alınır.

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (4)^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$= 16$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 18 \text{ elde edilir.}$$

ÇÖZ

$a=33$, $b=99$ olmak üzere,
 $\frac{(a+b)^2-4ab}{(a-b)^2+4ab}$ ifadesinin
 eşiti kaçtır?

ÖĞREN

$$\begin{aligned} (a+b)^2-4ab &= (a-b)^2 \text{ ve} \\ (a-b)^2+4ab &= (a+b)^2 \text{ özdeşlik-} \\ \text{lerinden yararlanılırsa;} \\ \frac{(a+b)^2-4ab}{(a-b)^2+4ab} &= \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{(33-99)^2}{(33+99)^2} = \frac{(-66)^2}{(132)^2} \\ &= \left(-\frac{66}{132}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ olur.} \end{aligned}$$



$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
 özdeşlikleri de unutulma-
 malıdır.

DİKKAT ET

ÇÖZ

$$x+y=-1, \quad x \cdot y = -\frac{1}{3}$$

olduğuna göre, x^2+y^2 kaçtır?

ÖĞREN

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ x+y &= -1 \text{ ve } x \cdot y = -\frac{1}{3} \text{ olduğundan;} \\ x^2+y^2 &= (-1)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ x^2+y^2 &= 1 + \frac{2}{3} \\ x^2+y^2 &= \frac{5}{3} \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÇÖZ

$a^2-4a+3=0$ olduğuna göre,
 $a^2+\frac{9}{a^2}$ ifadesinin değeri
 kaçtır?

ÖĞREN

Bir eşitlik (a^2-4a+3) verilmiş
 ve karesi alınmış bir ifade
 $\left(a^2+\frac{9}{a^2}\right)$ sorulduğundan eşit-
 likteki her terim, eşitliğin
 bilinmeyenine bölünür.

$$\frac{a^2}{a} - \frac{4a}{a} + \frac{3}{a} = \frac{0}{a}$$

$$\Rightarrow a - 4 + \frac{3}{a} = 0$$

$$\Rightarrow a + \frac{3}{a} = 4 \text{ bulunur.}$$

$a + \frac{3}{a} = 4$ ifadesinin her iki

tarafının karesi alınırsa;

$$\left(a + \frac{3}{a}\right)^2 = (4)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{3}{a} + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 16$$

$$a^2 + 6 + \frac{9}{a^2} = 16$$

$$a^2 + \frac{9}{a^2} = 10 \text{ elde edilir.}$$

**NOT**İki kare farkı özdeşliği

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \text{ 'dir.}$$

Örneğin;

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1) \cdot (x+1)$$

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x-5) \cdot (2x+5)$$

$$16y^2 - a = (4y)^2 - (\sqrt{a})^2 \\ = (4y - \sqrt{a}) \cdot (4y + \sqrt{a})$$

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 \\ = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

ÇÖZ

$$x\sqrt{2} - 3y = 6 \text{ ve } 2x^2 - 9y^2 = 60 \\ \text{olduğuna göre, } x \text{ kaçtır?}$$

ÖĞREN

$2x^2 - 9y^2$ ifadesine iki kare farkı özdeşliği uygulanırsa;

$$2x^2 - 9y^2 = (x\sqrt{2})^2 - (3y)^2 \\ = (x\sqrt{2} - 3y) \cdot (x\sqrt{2} + 3y) \text{ olur.}$$

Yani;

$$\underbrace{2x^2 - 9y^2}_{60} = \underbrace{(x\sqrt{2} - 3y)}_6 \cdot (x\sqrt{2} + 3y)$$

$$60 = 6 \cdot (x\sqrt{2} + 3y)$$

$$10 = x\sqrt{2} + 3y \text{ elde edilir.}$$

Elde edilen eşitlikler birlikte çözülürse;

$$x\sqrt{2} - 3y = 6$$

$$x\sqrt{2} + 3y = 10$$

$$+ \quad \frac{2x\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{2} \quad x\sqrt{2} = 8$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$$x^2 - y^2 = 12$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{6}$$

olduğuna göre, $x^2 + y^2$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{x-y}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2x}{x^2-y^2} = \frac{5}{6}$$

$x^2 - y^2 = 12$ değeri yerine yazılırsa;

$$\frac{2x}{12} = \frac{5}{6}$$

$$2x = 10$$

$$x = 5 \text{ bulunur.}$$

"Ne duruyorsun be,
at kendini denize...

Yelken d,

Kürek d,

dümen ol,

su ol.

"Git gideceğin yere..."

Orhan Veli® Kanık

ÇÖZ

a ve b pozitif tam sayıları için $a^2 = 4b^2 + 17$ olduğuna göre a+b toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$a^2 = 4b^2 + 17$$

$$a^2 - 4b^2 = 17$$

iki kare farkı

$$(a-2b) \cdot (a+2b) = 17$$

Çarpımları 17 olan iki pozitif tam sayının (17 asal olduğundan) çarpımlarından küçük olanı 1 ve büyük olan 17 olmalıdır.

O hâlde;

$$\underbrace{(a-2b)}_1 \cdot \underbrace{(a+2b)}_{17} = 17 \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$a - 2b = 1$$

$$+ a + 2b = 17$$

$$2a = 18 \quad a = 9 \text{ 'dur.}$$

Bulunan a değeri eşitliklerden herhangi birinde yerine yazılırsa;

$$a - 2b = 1$$

$$9 - 2b = 1$$

$$8 = 2b$$

$$b = 4 \text{ olur.}$$

$$\text{Bu durumda } a+b = 9+4 \\ = 13 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$\frac{2x \cdot (x^2-1) + 5 \cdot (x^2-1)}{(4x^2-25) \cdot (x-1)}$ ifadesi-
nin en sade halini bulunuz.

ÖĞREN

$$\frac{2x \cdot \overbrace{(x^2-1)}^{\text{ortak çarpan}} + 5 \cdot \overbrace{(x^2-1)}^{\text{ortak çarpan}}}{(4x^2-25) \cdot (x-1)}$$

$$= \frac{\overbrace{(x^2-1)}^{\text{iki kare farkı}} (2x+5)}{\underbrace{((2x)^2-5^2)}_{\text{iki kare farkı}} \cdot (x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{x-1} \cdot (x+1) \cdot (2x+5)}{(2x-5) \cdot \cancel{(2x+5)} \cdot \cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{x+1}{2x-5} \text{ bulunur.}$$



NOT

$ax^2 + bx + c$ biçimin-
deki bir ifade de, a ve c
sayıları çarpımlarına ay-
rılır.

$a = k \cdot t$, $c = m \cdot n$ olsun.

Çarpımlara ayrılan sayılar
öyle sayılar seçilmelidir ki,
sayılar çarpımla çarpılıp
toplandığında x'in katsayı-
sı (b'yi) vermelidir.

Buna göre;

$$ax^2 + bx + c = (kx+m)(tx+n)$$

$$\begin{array}{cc} k & m \\ t & n \end{array} \quad b = k \cdot n + t \cdot m$$

ÇÖZ

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9} : \frac{2x-1}{x^2-3x}$$

İfadelerinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

ÖĞREN

İfadeler çarpanlara ayrılırsa;

$$2x^2+5x-3 = (2x-1)(x+3)$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad -1 \quad -x \\ 1x \quad 3 \quad +6x \\ \hline 5x \end{array}$$

$$x^2-9 = x^2-(3)^2 = (x-3)(x+3)$$

$$x^2-3x = x(x-3) \text{ elde edilir.}$$

İfadelerin çarpanlara ayrılmış biçimleri yerine yazılırsa;

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9} : \frac{2x-1}{x^2-3x}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} : \frac{2x-1}{x(x-3)}$$

$$= \frac{2x-1}{x-3} \cdot \frac{x(x-3)}{2x-1} = x \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-12}$$

kesrinin sadeleştirilmiş biçimi

$$\frac{x-1}{x-3} \text{ olduğuna göre, } a+b$$

toplamı kaçtır?

ÖĞREN

Paydadaki x^2+x-12 ifadesinin çarpanlara ayrılmış hali;

$$x^2+x-12 = (x+4)(x-3) \text{ olur.}$$

$$(x+4)(x-3) = (x+4)(x-3)$$

$\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-12}$ kesrinin sadeleştirilmiş hali;

$$\frac{x-1}{x-3} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\frac{x^2+ax+b}{(x+4)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3} \text{ olmalıdır.}$$

Sadeleştirilmiş

Kesrin paydasının çarpanlarından $(x+4)$ ifadesi kesrin sadeleştirilmiş halinde olmadığından

$(x+4)$ ifadesi sadeleştirilmiş demektir. $(x+4)$ çarpanı sadeleştirildiğine göre, payın çarpanlarından biri $(x+4)$ 'tür. Kesrin sadeleştirilmiş biçiminin, payında $(x-1)$ ifadesi olduğuna göre, payın ikinci çarpanı da $(x-1)$ olmalıdır. O hâlde;

$$x^2+ax+b = (x+4)(x-1)$$

$$x^2+ax+b = x^2+4x-x-4$$

$$x^2+ax+b = x^2+3x-4 \text{ olur.}$$

$$a=3, b=-4 \text{ olur.}$$

$$a+b=3+(-4)=-1 \text{ elde edilir.}$$

Küp Özdeşlikleri

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Küpler Toplamı veya Farkı:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \text{ veya}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \text{ veya}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \text{ 'dir.}$$

Çöz

$$x = \frac{3}{2}, y = -\frac{7}{2} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\frac{x^3y + y^4}{x^2 - xy + y^2} \text{ ifadesinin eşiti kaçtır?}$$

Öğren

$$\frac{\overset{\text{ortak}}{\text{çarpan}} x^3y + y^4}{x^2 - xy + y^2} = \frac{y(x^3 + y^3)}{x^2 - xy + y^2}$$

$$= \frac{y(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2}$$

$$= y(x+y) \text{ olur.}$$

x ve y değerleri bulunan ifade de yerine yazılırsa;

$$y(x+y) = -\frac{7}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \right)$$

$$= -\frac{7}{2} \cdot -2$$

$$= 7 \text{ bulunur.}$$

Çöz

$a+b=6$ ve $a \cdot b=4$ olduğuna göre, a^3+b^3 toplamı kaçtır?

Öğren

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

özdeşliğinden yararlanılırsa;

$$a^3 + b^3 = 6^3 - 3 \cdot 4 \cdot 6$$

$$a^3 + b^3 = 216 - 72$$

$$a^3 + b^3 = 144 \text{ bulunur.}$$

Çöz

a ve b pozitif reel sayılardır.

$$a^2 + b^2 = 10$$

$$a \cdot b = 3$$

olduğuna göre a^3+b^3 toplamı kaçtır?

Öğren

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ özdeşliğinden yararlanılırsa;

$$10 = (a+b)^2 - 2 \cdot 3$$

$$16 = (a+b)^2$$

$$a+b=4 \text{ olur.}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

özdeşliğinden yararlanılırsa;

$$a^3 + b^3 = 4 \cdot (10 - 3)$$

$$a^3 + b^3 = 4 \cdot 7$$

$$a^3 + b^3 = 28 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$a^3 + 3ab^2 = 31$ ve $b^3 + 3a^2b = -50$ olduğuna göre, $a-b$ kaçtır?

ÖĞREN

$$a^3 + 3ab^2 = 31 \rightarrow (1)$$

$$b^3 + 3a^2b = -50 \rightarrow (2)$$

Verilen ifadelerden ikinci ifade "-" ile çarpılır ve birinci ifade ile toplanırsa;

$$\begin{array}{r} a^3 + 3ab^2 = 31 \\ -/b^3 + 3a^2b = -50 \\ + \\ \hline a^3 + 3ab^2 = 31 \\ -b^3 - 3a^2b = 50 \\ + \\ \hline a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b = 81 \\ \underbrace{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}_{(a-b)^3} = 81 \end{array}$$

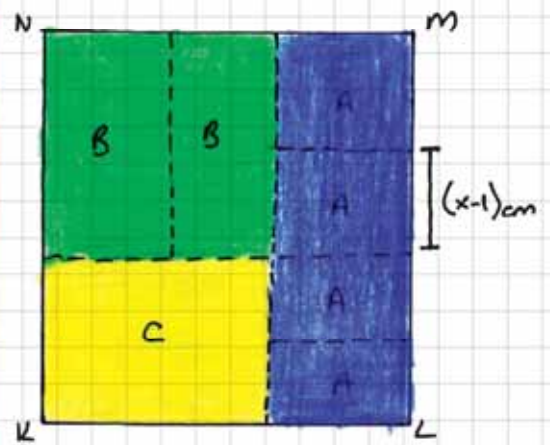
$$(a-b)^3 = 81$$

$a-b$ değerini bulmak için eşitliğin her iki tarafının köp kökü alınır;

$$\sqrt[3]{(a-b)^3} = \sqrt[3]{81}$$

$$\Rightarrow a-b = 3 \sqrt[3]{3} \text{ elde edilir.}$$

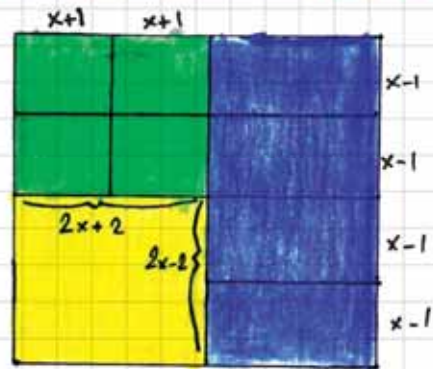
ÇÖZ



Yukarıdaki şekilde KLMN karesini oluşturmak için 4 tane özdeş A dikdörtgeni, 2 tane özdeş B dikdörtgeni ve bir tane C dikdörtgeni verilmiştir. A ve B dikdörtgenlerinin kısa kenarları sırasıyla $(x-1)$ cm ve $(x+1)$ cm'dir.

Buna göre C dikdörtgeninin alanını veren cebirsel ifadeyi bulunuz.

ÖĞREN



$$\begin{aligned} (2x-2)(2x+2) &= 4x^2 + 4x - 4x + 4 \\ &= 4x^2 + 4 // \end{aligned}$$

1. Aşağıdakilerden hangisi, $x + x^2 + x^3 + x^4$ ifadesinin çarpanlarından biridir?

- A) $1-x$
- B) $1-x^2$
- C) x^2
- D) $1+x^2$
- E) $1+x^3$

2. $\frac{x^3 - x^2y - x + y}{x^2 - xy + x - y}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $x-1$
- B) $x+1$
- C) $1-x$
- D) $1-x^2$
- E) $x+y$

3. $(ax + \frac{a}{2}) : (x^2 - \frac{1}{4}) = 4$

olduğuna göre, x 'in a türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{a+1}{2}$
- B) $\frac{a+1}{4}$
- C) $\frac{a+2}{4}$
- D) $\frac{2a+1}{4}$
- E) $\frac{2a+1}{2}$

4. Alanı 4 birim kare ve çevresi 12 birim olan bir dikdörtgenin kenar uzunlukları arasındaki farkın pozitif değeri kaçtır?

- A) 2
- B) $\sqrt{5}$
- C) $2\sqrt{3}$
- D) $2\sqrt{5}$
- E) $3\sqrt{6}$

Soru

Cevap Performansı

1	2	3	4
D	A	C	D
E	B	D	A
A	C	E	B
B	D	A	C
C	E	B	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyin, aralarını çizgi ile birleştirin.

Doğru Cevaplar

D, A, C, D

DENKLEM ÇÖZME

Bir Bilinmeyenli Denklemler

$$ax + b = mx + n$$

$a=m$ ve $b=n$ ise çözüm kümesi reel sayılardır.

$a=m$ ancak $b \neq n$ ise çözüm kümesi boş kümedir.

İki Bilinmeyenli Denklemler

a, b ve c reel sayılar ve $a, b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ şeklindeki eşitliklere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir.

Yok Etme Metodu:

Denklemdaki değişkenlerden birinin katsayıları mutlak değerce eşit ancak zıt işaretli olarak eşitlenir.

Denklemler taraf tarafa toplanarak yok edilip diğer değişken bulunur. Bulunan değişken yerine yazılıp, diğer değişken bulunur.

Yerine Koyma Metodu:

Denklemlerden birinde değişkenlerden biri yalnız bırakılıp diğer denklemde yerine yazılarak sonucu ulaşılır.

Herkesin hayatına kimse karışamaz.



UYARI

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ denklem sistemi için,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \text{ ise çözüm}$$

kümesi sonsuz elemanlıdır.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f} \text{ ise çözüm}$$

kümesi boş kümedir.

$kx + my + n = 0$ denklemi

bütün x ve y gerçel sayıları sağlıyorsa $k=m=n=0$ olmalıdır.

Çöz

a ve b reel sayılardır.

$$a + 2b = 44$$

$$\frac{b-a}{a} = \frac{1}{3}$$

olduğuna göre a+b kaçtır?

ÖĞREN

$$a + 2b = 44$$

$$\frac{b-a}{a} = \frac{1}{3}$$

$$3b - 3a = a \rightarrow 3b = 4a$$

b=4k ve a=3k olursa,

$$a + 2b \Rightarrow 3k + 2 \cdot 4k = 44$$

$$11k = 44 \rightarrow k = 4$$

a+b=7k olduğuna göre

$$a+b = 7 \cdot 4$$

$$a+b = 28 \text{ bulunur.}$$

Çöz

x, y ve z gerçel sayıları için

$$x + z = 14$$

$$x + y = 6$$

$$y + 2z = 11$$

olduğuna göre, x+y+z toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$x + z = 14$$

$$- / x + y = 6$$

$$y - z = 8$$

$$y = 8 + z$$

$$y + 2z = 11 \text{ ise}$$

$$8 + z + 2z = 11$$

$$3z = 3 \quad z = 1$$

$$x + z = 14 \Rightarrow x + 1 = 14$$

$$x = 13$$

$$x + y = 6 \Rightarrow 13 + y = 6$$

$$y = -7$$

$$x + y + z = 13 - 7 + 1$$

$$= 7 //$$

"Motivasyon konusunda
en önemli şey,

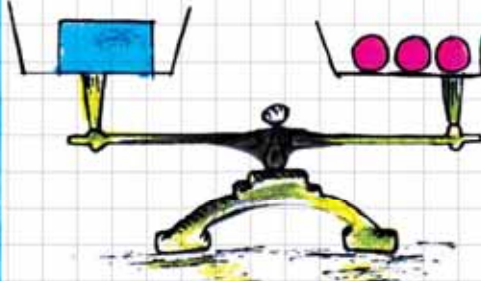
hedef belirlemektir.

Daima

bir hedefin olmalıdır."

Francie Larrieu Smith

Ö2



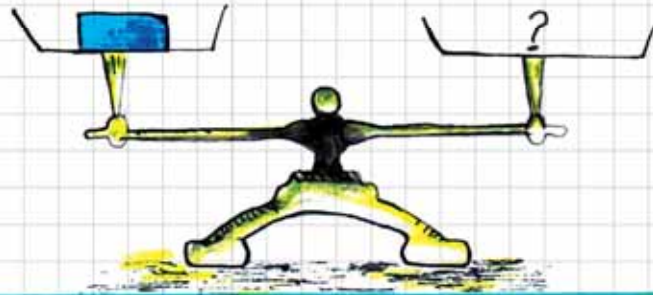
Şekil I



Şekil II

Yukarıda eşit kollu iki tane terazi Şekil I ve Şekil II'de ağırlıklarıyla dengede durmaktadır.

Buna göre, aşağıdaki gibi terazinin sol kefesindeki  ağırlığına karşılık sağ kefesine  ağırlığından kaç tane konulmalı ki terazi dengede kalsın?



ÖĞREN

 = x  = y  = z ifade edelim.

Şekil I'de $x = 3y + z$ ①

Şekil II'de $x = 3z + 2y$ ②

① ve ②'den $3z + 2y = 3y + z$ $2z = y$

Birinci denklemde y yerine $2z$ yazılırsa,

$$x = 3y + z \Rightarrow x = 3 \cdot (2z) + z \quad x = 6z + z \quad x = 7z$$

Yani 7 tane  ağırlığından konmalı ki terazi dengede dursun.

$$1. \frac{a}{3} + \frac{a}{\frac{a}{5}} + \frac{\frac{a}{3}}{a} - 2 = 20$$

olduğuna göre, a kaçtır?

- A) 52
B) 51
C) 50
D) 49
E) 48

$$2. \begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ 6x + 5y &= 10 \end{aligned}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

- A) 9
B) 12
C) 14
D) 15
E) 16

$$3. \begin{aligned} 5 \cdot (2-x) + 3 \cdot (x-4) - 7x &= \\ -4 \cdot (3+2x) - x + 10 \end{aligned}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{-2\}$ B) $\{2\}$ C) $\emptyset$
D) $\{-2, 2\}$ E) $\mathbb{R}$

$$4. \frac{a \cdot b}{a+b} = 2$$

$$\frac{b \cdot c}{b+c} = 3$$

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c} = \frac{3}{2}$$

olduğuna göre, b kaçtır?

- A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{6}$ E) 6

$$5. \begin{aligned} 3x + 5y &= 4 \\ 3y - 4z &= 6 \\ x + 2z &= 2 \end{aligned}$$

olduğuna göre, $x + 4y - 3z$ toplamı kaçtır?

- A) 10
B) 8
C) 6
D) 4
E) 2

Sözlü Sorular

Cevap Performansı

1	2	3	4	5
C	D	E	E	D
D	E	A	B	C
E	A	B	C	A
A	B	C	D	B
B	C	D	A	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretle, arabırını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

C, D, E, E, D

ORAN - ORANTI

* Aynı birimden iki çokluğun bölümüne oran denir. a'nın b'ye oranı, $a:b$ veya $\frac{a}{b}$ şeklinde gösterilir.

* Oranların eşitliğine orantı denir. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ orantısı; $a:c:e = b:d:f$ şeklinde de gösterilebilir.

* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow$ orantı sabiti

* $a:b = c:d$

 içler
 dışlar

UYARI
 a, b, c sayıları ile dördüncü orantılı sayı x ise;
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ 'tir.

* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$a = b.k \quad c = d.k \quad e = f.k$

$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = \frac{e^n}{f^n} = k^n$

$\frac{a+c}{b+d} = \frac{e}{f}, \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$

$\frac{ax+cy+ez}{bx+dy+fz} = k, \quad \frac{a.c.e}{b.d.f} = k^3$



Orantı Çeşitleri

Doğru Orantı:

x artarken, y aynı oranda artıyor; x azalırken, y aynı oranda azalıyor ise; x ile y doğru orantılıdır.

$$\frac{x}{y} = k \text{ veya } x = y.k$$

x, y, z sayıları
 sırayla a, b, c
 sayıları ile doğru
 orantılı ise; $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k,$
 $x = a.k, y = b.k, z = c.k$



ÖRNEK

Ters Orantı:

x artarken, y aynı oranda azalıyor; y azalırken x aynı oranda artıyorsa, x ile y ters orantılıdır.

$$x.y = k \text{ veya } x = \frac{k}{y}$$

ÖRNEK

x, y, z sayıları sırasıyla a, b, c sayıları ile ters orantılı ise;

$$x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c = k$$

$$x = \frac{k}{a}, y = \frac{k}{b}, z = \frac{k}{c}$$


Bileşik Orantı:

x sayısı, y ile doğru z ile ters orantılı ise;

$$\frac{x \cdot z}{y} = k \quad \text{veya} \quad x = \frac{y \cdot k}{z}$$

UYARI

Bileşik orantı problemlerinde;

Birinci işte	İkinci işte
Verilenlerin çarpımı	Verilenlerin çarpım
Birinci durumda	İkinci durumda
Yapılan iş miktarı	Yapılan iş miktarı

kuralı kullanılır.

Aritmetik Ortalama

Aritmetik Ortalama = AO

$$AO = \frac{\text{Sayılar Toplamı}}{\text{Sayı Adedi}}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sayılarının aritmetik ortalaması, bu n tane sayının toplamının n 'ye bölümü ile bulunur.

$$AO = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

Geometrik Ortalama

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sayılarının geometrik ortalaması, bu n tane sayının çarpımının n . dereceden kök içinde yazılması ile bulunur.

Geometrik Ortalama = GO

$$GO = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$$

UYARI

İki sayının aritmetik ortalaması, geometrik ortalamasına eşitse sayılar birbirine eşittir.

Harmonik Ortalama

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ gibi n tane sayının harmonik ortalaması;

$$HO = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

"Büyük işler,
insanlarla
dağlar karşılaşıncaya
meydana gelir."

William Blake

Çöz

1'den 100'e kadar numaralandırılmış 100 top, A ve B kutularına dağıtılıyor.

Bu durumda A ve B kutularındaki topların numaralarının aritmetik ortalaması sırasıyla 50 ve 60 oluyor.

Buna göre, A kutusundaki top sayısı kaçtır?

ÖĞREN

A kutusundaki top sayısı x olursa, B kutusunda $100-x$ tane top olur.

$$x \cdot 50 + (100-x) \cdot 60 = 1+2+\dots+100$$

$$50x + 60 \cdot 100 - 60x = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

$$5x + 600 - 6x = 505$$

$$x = 95 \text{ bulunur.}$$

Çöz

Birbirine bağlı üç dişli farktan birincisi 4 tur atarsa, ikincisi 3 tur, üçüncüsü 5 tur atıyor. Farklardaki toplam diş sayısı 188 ise en büyük farkta kaç diş vardır?

ÖĞREN

Farktaki diş sayısı ile tur sayısı ters orantılıdır.

I. II. III.

$$\frac{k}{4} \quad \frac{k}{3} \quad \frac{k}{5}$$

$$\frac{k}{4} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 188$$

$$(15) \quad (20) \quad (12)$$

$$\frac{47k}{60} = 188 \quad k = 240 \text{ olur.}$$

$$\text{En büyük farkta } \frac{k}{3} = \frac{240}{3}$$

$$= 80 \text{ tane diş vardır.}$$

Çöz

a ve b sayılarının geometrik ortalaması 6, aritmetik ortalaması 8'dir. Buna göre, a^2 ve b^2 sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

ÖĞREN

Geometrik Ortalama,

$$GO(a, b) = \sqrt{a \cdot b} = 6$$

Aritmetik Ortalama,

$$AO(a, b) = \frac{a+b}{2} = 8$$

$$a+b=16 \text{ ve } a \cdot b=36 \text{ olur. } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

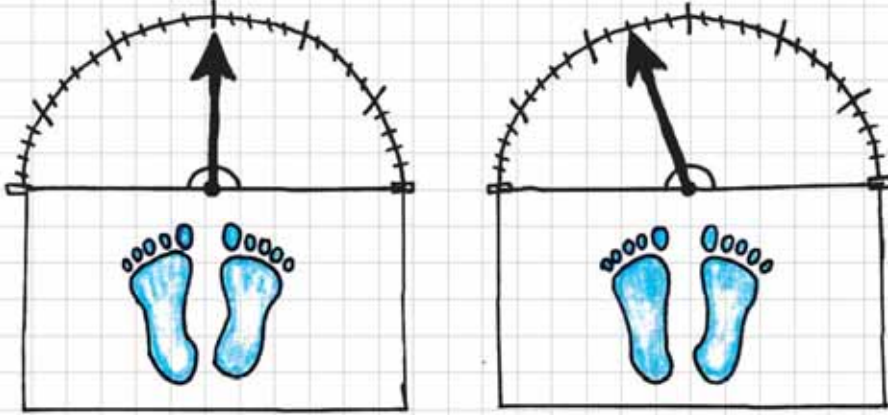
$$(16)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot 36 \quad 256 = a^2 + b^2 + 72$$

$$184 = a^2 + b^2$$

$$AO(a^2, b^2) = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{184}{2} = 92 \text{ 'dir.}$$

ÇÖZ

Aşağıdaki A ve B marka tartıların eşit bölmelerden oluşturulmuş kg göstergeleri yer almaktadır.



Ahmet önce A tartısında sonra B tartısında tartılırken göstergeler şekildeki gibi oluyor. A marka tartının ağırlık kapasitesi 100 kg ise B marka tartının ağırlık kapasitesi kaç kg'dır?

ÖĞREN

A tartısı 30 x ağırlığında

B tartısı 30 y ağırlığında

Ahmet'in A tartısındaki ağırlığı 15 x

Ahmet'in B tartısındaki ağırlığı 12 y

$15x = 12y$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır,

$x = 4k$, $y = 5k$

$$A \Rightarrow 100 = 30 \cdot 4k \quad k = \frac{5}{6}$$

$$B \Rightarrow 30 \cdot 5k \Rightarrow 30 \cdot 5 \cdot \frac{5}{6} = 125$$

B tartısı, 125 kg (max).

ÇÖZ

2, 3 ve 5 kişilik oda türlerinin bulunduğu Yıldız ve Gökyüzü otelleri ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

* Bu otellerde bulunan toplam oda sayısı otellere göre dağılımı birinci dairesel grafikte verilmiştir.

* Bu otellerde bulunan toplam oda sayısının türlerine göre dağılımı ikinci dairesel grafikte verilmiştir.



Birinci Grafik



İkinci Grafik

Bu iki otelde 5 kişilik odaların toplam sayısı 50'dir. Yıldız otelindeki 2 kişilik odaların toplam sayısı 3 ve 5 kişilik odaların sayısından bir fazladır. Buna göre, Gökyüzü otelinde bulunan 5 kişilik odaların toplam sayısı kaçtır?

DÖRGEN



$$\begin{array}{r} 150 \quad 50 \\ 120 \quad x \\ \hline 0.0 \end{array}$$

$$150 \cdot x = 120 \cdot 50 \quad x = 40$$

$$\begin{array}{r} 150 \quad 50 \\ 90 \quad x \\ \hline \end{array}$$

$$x \cdot 150 = 90 \cdot 50 \quad x = 30$$

Toplam oda sayısı

$$50 + 40 + 30 = 120$$



$$\begin{array}{r} 360 \quad 120 \\ 120 \quad x \\ \hline 0.0 \end{array}$$

$$x = 360 = 120 \cdot 120$$

$$x = 40$$

iki kişilik oda sayısı $x+1$

üç kişilik oda sayısı x

beş kişilik oda sayısı x

$$3x + 1 = 40 \Rightarrow x = 13$$

İki oteldeki toplam beş kişilik oda sayısı 50'dir. Bunların 13'ü

Yıldız otelinde ise,

$50 - 13 = 37$ tanesinde Gökyüzü otelindedir.

1. $\frac{5}{a} = \frac{7}{b}$ ve $a+b=36$ oldu-

ğuna göre, $b-a$ kaçtır?

- A) 8
- B) 12
- C) 16
- D) 20
- E) 24

2. Bir karışımı oluşturan üç mad-
denin miktarları arasında $\frac{A}{B} = \frac{5}{6}$

ve $\frac{B}{C} = \frac{4}{3}$ orantıları vardır.

Bu karışım da A maddesi C madde-
sinden 8 gram fazla olduğuna
göre, kaç gram B maddesi

kullanılmıştır?

- A) 72
- B) 80
- C) 96
- D) 108
- E) 116

3. Bir miktar para, 3, 4, 6 nu-
maralı kutulara numaralarıyla
ters orantılı olacak şekilde
dağıtılıyor. Aynı para, bu ku-
tularda numaralarıyla doğru
orantılı olarak dağıtılsaydı,
4 numaralı kutudaki para
20 TL daha az olacaktı.

Buna göre, dağıtılan toplam
para kaç TL'dir?

- A) 390 TL
- B) 420 TL
- C) 560 TL
- D) 780 TL
- E) 840 TL

4. 4, x, y sayıları sırasıyla
x, 16, 6 sayıları ile orantılı-
lıdır. Buna göre, y'nin po-
zitif değeri kaçtır?

- A) 3
- B) 6
- C) 9
- D) 12
- E) 15

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	C	D	A
D	E	B	B
E	A	C	C
A	B	E	D
B	D	A	E

Performansını görmek
için cevaplarını işaretleyin,
anılarını çizgi ile bir-
leştirin.

Doğru cevaplar
C, C, D, A

SAYI PROBLEMLERİ

✱ Verilen bir problemi çözmek için verilen sözel ifadeler matematiksel ifadeye çevrilir. Verilenler matematiksel ifadeye çevrilirken dikkat edilmesi gereken nokta problemin çözümüne yetecek minimum sayıda bilinmeyen kullanılmaktadır. Çünkü problemin çözümü için seçilen bilinmeyen sayısı kadar denkleme gerek vardır.

Örneğin;

Bilinmeyen herhangi bir sayı x olsun.

- Bir sayının 3 fazlası: $x+3$
- Bir sayının 2 eksigi: $x-2$
- Bir sayının 2 katı: $2 \cdot x$
- Bir sayının 3 katının 5 eksigi: $3 \cdot x - 5$
- Bir sayının 5 eksiginin 4 katı: $4 \cdot (x-5)$
- Bir sayının karesi: x^2
- Bir sayının 2 fazlasının karesi: $(x+2)^2$
- Bir sayının karesinin 2 fazlası: x^2+2
- Bir sayının küpü: x^3
- Bir sayının iki katının küpü: $(2 \cdot x)^3$
- İki sayıdan biri diğerinden 3 eksik: $x=y-3$ veya $y=x-3$



- Bir sayının 3 eksiginin 2 katı 5'e eşit ise: $2 \cdot (x-3) = 5$

- Bir sayının 2 katının 2 fazlası kendisine eşit ise:

$$2 \cdot x + 2 = x$$

Aynı şekilde herhangi bir iki sayı x ve y olsun.

- İki sayının toplamı: $x+y$

- İki sayının farkı: $x-y$

- İki sayının çarpımı: $x \cdot y$

- İki sayının oranı: $\frac{x}{y}$

- İki sayının kareleri toplamı:

$$x^2+y^2$$

- İki sayının toplamının karesi:

$$(x+y)^2$$

- İki sayının kareleri farkı:

$$x^2-y^2$$

- İki sayının farkının karesi:

$$(x-y)^2$$

UYARI

Bilinmeyen sayısını arttırmamak için birbiri cinsinden yazılabilecek ifadelerle ayrı bir bilinmeyen kullanmamak gerekir.

İki sayının toplamı 20 ise;

$$\begin{array}{rcl} \text{1. sayı} & \text{2. sayı} & \\ x & 20-x & \end{array}$$



ÖRNEK

İki sayıdan birinci sayının 2 katı ikinci sayının 5 katı ise,

$$\begin{array}{rcl} \text{1. sayı} & \text{2. sayı} & \\ 5 \cdot x & 2 \cdot x & \text{olur.} \end{array}$$

"Kelebek

bir defa kanatlandı mı,

bir daha asla tırtıl

haline gelmez."

Cennet ve Yeryüzü

ÇÖZ

Toplamı 108 olan üç sayıdan birinci sayı, ikinci sayının 3 katı, ikinci sayı ise üçüncü sayının 2 katıdır.

Buna göre, birinci sayı kaçtır?

ÖĞREN

Bu soruda birinci sayı, ikinci sayı, üçüncü sayı için ayrı bilinmeyenler kullanmak yerine bu sayılar birbiri cinsinden yazılır.

Üçüncü sayı x olsun.

İkinci sayı üçüncü sayının 2 katı olduğundan ikinci sayı $2x$ 'tir. Birinci sayı da ikinci sayının 3 katı olduğundan birinci sayı $3 \cdot 2x = 6x$ 'tir. Üç sayının toplamı 108 olduğuna göre,

$$6x + 2x + x = 108$$

$$9x = 108$$

$$x = 12 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda birinci sayı;

$$6x = 6 \cdot 12$$

$$x = 72 \text{ 'dir.}$$

ÇÖZ

Meral bir merdivenin basamaklarını ikişer ikişer inip üçer üçer çıkıyor. İnerken attığı adım sayısı çıkarken attığı adım sayısından 6 fazla olduğuna göre, merdiven kaç basamaklıdır?

ÖĞREN

Meral'in çıkarken attığı adım sayısı x olsun.

Bu durumda inerken attığı adım sayısı $x+6$ olur.

Merdivenin basamak sayısı, merdiveni kaçar kaçar çıktığı veya indiği ile adım sayısının farkımı olduğuna göre;

$$B.S = 2 \cdot (x+6) = 3 \cdot x$$

$$2x + 12 = 3x$$

$$x = 12 \text{ bulunur.}$$

Merdivenin basamak sayısını bulmak için x değeri

$2 \cdot (x+10)$ veya $3 \cdot x$ ifadelerinin herhangi birinde yerine yazılır.

$$B.S = 3 \cdot x$$

$$B.S = 3 \cdot 12$$

$$B.S = 36 \text{ 'dır.}$$

ÇÖZ

36 kişinin bulunduğu bir otobüsten 4 evli çift inerse, erkeklerin sayısı kadınların sayısının 3 katından 4 fazla oluyor.

Buna göre, otobüste başlangıçta kaç erkek vardır?

ÖĞREN

Otobüste başlangıç x tane erkek olsun.

Toplam 36 kişi olduğuna göre, kadınların sayısı $36-x$ olur. Otobüsten 4 evli çift inerse, otobüsten 4 erkek, 4 kadın iniyor demektir. O hâlde;

Erkek	Kadın
4 erkek inerse $\left(\begin{array}{l} x \\ x-4 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{l} 36-x \\ 32-x \end{array} \right)$ 4 kadın inerse

olur. Erkeklerin sayısı kadınların sayısının 3 katından 4 fazla oluyorsa;

$$x-4 = 3 \cdot (32-x) + 4$$

$$x-4 = 96 - 3x + 4$$

$$x-4 = 100 - 3x$$

$$4x = 104$$

$$x = 26 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda otobüste başlangıçta 26 erkek vardır.

ÇÖZ

Bir bilet kuyruğunda Yusuf baştan 17. sırada, Murat ise sondan 12. sıradadır.

Yusuf ile Murat arasında 3 kişi olduğuna göre, bilet kuyruğunda en az kaç kişi vardır?

ÖĞREN

Bu tür bilet kuyruğu sorularında en az ifadesi geçiyorsa çözüm kolayca şu şekilde yapılır.

Yusuf'un ve Murat'ın sırası toplanır. Aradaki 3 kişi, Yusuf ve Murat ikiyeşer kez sayıldığından çıkartılır.

Bu durumda kuyruktaki kişi sayısı,

$$17 + 12 - 3 - 2 = 24 \text{ kişi bulunur.}$$

**NOT**

Eğer bilet sırası sonunda soruda en fazla ifadesi geçiyorsa kuyruktaki kişi sayısı

Murat'ın sırası + Yusuf'un sırası + aradaki kişi sayısı ile bulunur.

ÇÖZ

Bir grup öğrenci misketlerle bir oyun oynuyorlar. Gruptaki her kişi arkadaşlarının sayısından bir fazla misket getiriyor. Oyun sonunda gruptaki iki kişi iki bilye geri kabinlarda dört bilye alıyor. Artan bilyeleri ise grup dışındaki başka bir arkadaşına veriyor. Oyun sonunda 36 bilye arttığına göre grupta kaç kişi vardır?

ÖĞREN

Grupa x kişi olsun. Herkes gruptaki arkadaş sayısı $x-1$ olur. Herkes arkadaş sayısında bir fazla misket getireceğine göre " x " tane misket getirmiş olurlar. O zaman toplam misket sayısı x^2 olur. Şimdi 2 kişi 2 bilye alıyor ve geri kalan $(x-2) \cdot 4$ bilye alıyor.

$$x^2 - 2 \cdot 2 - (x-2) \cdot 4 = 36$$

$$x^2 - 4 - 4x + 8 = 36$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0 \quad (x-8) \cdot (x+4) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x & -8 & \\ x & +4 & \end{array} \quad x=8 \text{ ve } x=-4$$

Kişi sayısı negatif olamayacağından grupta "8" kişi vardır.

ÇÖZ

Bir iş ilanına toplam 124 aday başvurmuştur. İlane başvuran erkek adayların dörtte birinin, kadın adayların ise beşte birinin başvurusu geçersiz sayılmıştır.

Başvurusu geçerli olan kadın ve erkek adayların sayısı eşit olduğuna göre, başvurusu geçersiz adayların toplam sayısı kaçtır?

ÖĞREN

Erkek

 x

$$\frac{3x}{4}$$

Kadın

 y

$$\frac{4y}{5}$$

 $\Rightarrow$ Başvurusu geçerli sayılan adaylar

$$\frac{3x}{4} = \frac{4y}{5} \Rightarrow 15x = 16y$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$16k \quad 15k$$

$$16k + 15k = 124$$

$$31k = 124 \Rightarrow k = 4$$

$$x = 16k \Rightarrow x = 16 \cdot 4 = 64 \text{ erkek aday}$$

$$y = 15k \Rightarrow y = 15 \cdot 4 = 60 \text{ kadın aday}$$

$$\frac{64}{4} = 16, \quad \frac{60}{5} = 12$$

Toplamda başvurusu geçersiz sayılan aday sayısı,
 $16 + 12 = 28$ kişidir.



ÇÖZ



Elinde kırmızı ve beyaz boyalar bulunan Kerem usta bu boyaları kullanarak pembe boya elde ediyor. Daha sonra bu boyayı iki farklı kovağa koyarak satışa sunuyor. Bu iki kova ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

* Boya kovaları büyük ve küçük boy olmak üzere iki farklı büyüklüktedir.

* Her bir kova için kullanılan kırmızı boya miktarının toplam ağırlığının, kullanılan beyaz boya miktarının toplam ağırlığına oranı tüm kovalar için aynıdır.

* Küçük kovanın kapasitesi 25 litre, büyük kovanın kapasitesi 40 litredir.

Kerem usta bu kovalardan birer tane hazırlamak için 28 litre kırmızı boya kullandığına göre, küçük boy kovada kullanılan beyaz boya miktarı büyük boy kovada kullanılan beyaz boya miktarından ne kadar azdır?

Küçük kovanın kapasitesi 25 litre
Büyük kovanın kapasitesi 45 litre $\rightarrow$ Toplamda 70 litre
28 litre kırmızı boya varsa $70 - 28 = 42$ litre beyaz boya kullanılmıştır.

Kırmızı Boya = K , Beyaz Boya = B ile ifade edelim.

Birinci kova için;

$$\frac{K}{B} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3K = 2B, K = 2x, B = 3x \text{ denilirse}$$

Küçük kova için;

$$Kırmızı + Beyaz = 2x + 3x = 5$$

$$5x = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$K = 2 \cdot 5 = 10 \text{ litre kırmızı boya}$$

$$B = 3K = 3 \cdot 5 = 15 \text{ litre beyaz}$$

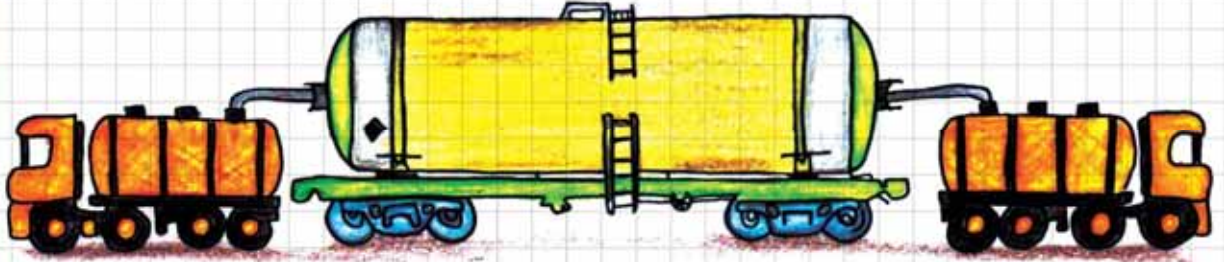
Büyük kova için;

$$5x = 45 \Rightarrow x = 9$$

$$9 \cdot 2 = 18(K), 9 \cdot 3 = 27(B)$$

$$27 - 15 = 12 \text{ litre}$$

Çöz



Yukarıdaki mazot ve benzin deposunda toplamda 124 ton yakıt bulunmaktadır. Bu depoda ilk önce 19 ton mazot boşaltılıyor. Daha sonra 13 ton benzin boşaltılıyor. En sonunda depodaki benzin miktarı mazot miktarına eşit oluyor.

Buna göre, başlangıçta depoda kaç ton mazot vardır?

ÖRNEK

Başlangıçta 124 ton yakıt var

$19 + 13 = 32$ ton boşaltılıyor.

$124 - 32 = 92$ ton yakıt kalıyor.

Son durumda benzin miktarı mazot miktarına eşit ise,

$$\frac{92}{2} = 46$$

Yani son durumda 46 ton mazot, 46 ton benzin vardır.

Toplamda mazot miktarı = 46 + boşaltılan mazot miktarı,
 $= 46 + 19$
 $= 65$ ton mazot vardır.

ÇÖZ

Bir çiftlikteki koyun ve inek sayıları ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

* Bu çiftlikteki ineklerin sayısının 4 katı, koyunların sayısının 3 katından 4 fazladır.

* Çiftliğe 1 inek daha alınırsa koyun sayısı inek sayısına eşit oluyor.

Buna göre, bu çiftlikte kaç tane koyun vardır?

ÖĞREN

inek = i
Koyun = k $\rightarrow$ ile temsil edelim.

$4i = 3k + 4 \rightarrow$ Birinci öncülden
 $k = i + 1 \rightarrow$ İkinci öncülden

$$4i - 4 = 3k$$

$$4i - 4 = 3(i + 1)$$

$$4i - 4 = 3i + 3$$

$$4i - 3i = 7$$

$$i = 7 \text{ bulunur.}$$

$$k = i + 1 \text{ ise}$$

$$k = 7 + 1$$

$$= 8 \text{ bulunur.}$$

Yani 8 tane koyun, 7 tane inek vardır.



ÇÖZ

Öznur, 3 matematik ve 2 fizik olmak üzere her birinde 24 soru bulunan 5 farklı test çözmüştür. Öznur'un bu 5 testteki doğru cevaplarının sayısının ortalaması 21, fizik testindeki doğru cevaplarının sayılarının ortalamaları 20 olduğuna göre;

Öznur'un bir matematik testindeki doğru cevap sayısı ile bir fizik testindeki doğru cevap sayısı arasındaki fark en fazla kaç olur?

ÖĞREN

$$3 \text{ matematik} = 3 \cdot 24 = 72$$

$$2 \text{ fizik} = 2 \cdot 24 = 48$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ + 48 \\ \hline 120 \end{array} \rightarrow \text{Toplam 120 soru var.}$$

Toplam doğru sayısı

$$21 \cdot 5 = 105$$

Fizik Testindeki doğru sayısı

$$20 \cdot 2 = 40$$

Matematikteki doğru sayısı

$$105 - 40 = 65$$

Matematik $\begin{cases} \rightarrow 1. \text{ testi } 24 \\ \rightarrow 2. \text{ testi } 24 \\ \rightarrow 3. \text{ testi } 17 \end{cases}$

Fizik $\begin{cases} \rightarrow 1. \text{ testi } 24 \\ \rightarrow 2. \text{ testi } 16 \end{cases}$

Bir matematik testindeki doğru cevap sayısını 24 olarak alırsak, fizik testindeki doğru cevap sayısını 16 olarak alırsak

$$24 - 16 = 8 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

Bir apartmanda 1'den 7'ye kadar numaralandırılmış 7 dairenin her birinde birer çocuk bulunmaktadır. Bu çocukların her biri, bayram ziyareti için bu apartmanda bulunan kendi daireesi dahil diğer tüm daireleri ziyaret etmiş ve birer daireeye fazladan bir kere daha gitmişlerdir. Gittikleri daireelerden dairee numarası kadar şeker almışlardır.

Bu çocuklardan ikisi toplam 65 şeker topladığına göre, bu iki çocuğun fazladan gittiği daireelerin numaraları toplamı kaçtır?

ÖĞREN

Kapı numaraları sırasıyla,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Bir çocuk bunların hepsine giderse toplayacağı şeker sayısı,

$$n \cdot \frac{(n+1)}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

Diğer çocukta aynı şekilde 28 tane şeker toplayacaktır.

$$28 + 28 = 56 \text{ şeker}$$

Ama fazladan iki daireeye gittikleri için 65 şeker toplamışlardır.

$$65 - 56 = 9$$

O zaman fazladan gittikleri daireelerin numaraları toplamı 9 olur.



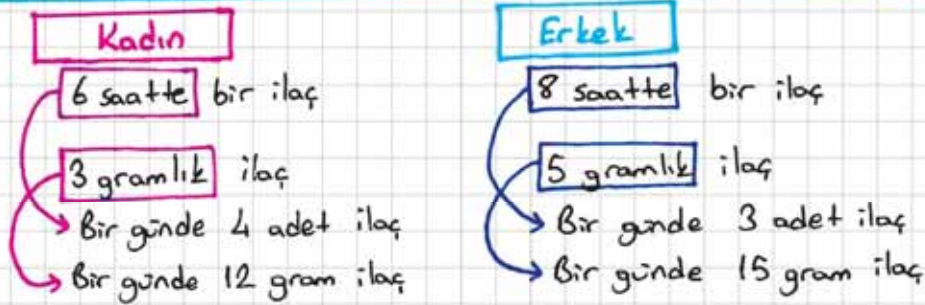
ÇÖZ

Bir hastanede kadın ve erkek hastalara verilen ilaçlar ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

- * Kadınlara 6 saatte, erkeklere 8 saatte bir bir doz ilaç verilmektedir.
- * Kadınlara 3 gramlık, erkeklere ise 5 gramlık ilaç verilmiştir.
- * Bu hastalara bir günde toplam 246 gram ilaç, 70 doz halinde verilmiştir.

Buna göre bu hastanede toplam kaç hasta vardır?

ÇEREN



Şimdi tablomuzu kurduk. Kadınlara = K, Erkekler = E diyelim.

$$- 3/4K + 3E = 70$$

$$12K + 15E = 246$$

±

$$-12K - 9E = -210$$

±

$$12K + 15E = 246$$

$$6E = 36$$

$$E = 6 \text{ (Herhangi bir denklemde yerine yaz)}$$

$$4K + 3E = 70$$

$$4K + 3 \cdot 6 = 70$$

$$4K = 70 - 18$$

$$4K = 52$$

$$K = 13$$

$$13 + 6 = 19 \text{ tane hasta var.}$$

1. Üç sayıdan üçüncüsü ikincisinin 4 katı, birinci de üçüncünün $\frac{1}{3}$ katıdır. Birinci ve üçüncü sayıların toplamı, ikinci sayının 6 katından 3 fazla ise, birinci sayı kaçtır?

- A) -9
- B) -8
- C) -6
- D) $-\frac{9}{2}$
- E) -4

2. Bir kabın $\frac{2}{7}$ 'si su ile doludur. Kaba 10 litre su ilave edilince, boş kısmın hacmi, dolu kısmının hacminin 2 katının 18 litre eksigi kadar olmaktadır. Buna göre, ilk durumda kabın içinde kaç litre su vardır?

- A) 12
- B) 24
- C) 36
- D) 60
- E) 84

3. Bir koleksiyoner, değerleri 5 TL, 15 TL ve 30 TL olan üç çeşit puldan toplam 50 tane almış ve bunun için 850 TL ödemiştir. 30 TL değerindeki pulların sayısı, 5 TL değerindeki pulların sayısının 4 katı olduğuna göre, koleksiyoner 15 TL değerindeki pullardan kaç tane satın almıştır?

- A) 24
- B) 25
- C) 30
- D) 32
- E) 40

Soru

Cevap Performansı

1	2	3
C	B	E
A	D	B
D	C	C
E	A	A
B	E	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
C, B, E

4. Bir sınıftaki öğrenciler aralarında para toplayarak, doğum günü için bir arkadaşlarına hediye alacaklardır. Eğer her biri 1,5 TL verirse toplanan para alacakları hediye için 2 TL eksik olmakta; eğer her biri 1,6 TL verirse toplanan para, alacakları hediye için bu kez 1,2 TL fazla olacaktır. Buna göre, bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

- A) 16
- B) 20
- C) 24
- D) 30
- E) 32

5. Bir çocuk düz yolda ileriye attığı her 6 adımdan sonra 2 adım geriye giderek ilerlemektedir. Bu şekilde devam ederek toplam 420 adım attığında, harekete başladığı noktadan kaç adım uzaklaşmış olur?

- A) 204 B) 208 C) 210
- D) 212 E) 214

6. Bir ticari taksinin taksimetresi, sabit bir açılış ücreti üzerine her 100 metrede bir miktar ücret eklemektedir. Bu araçla 6 km yolculuk yapan bir kişi 8,7 TL; 4 km yolculuk yapan bir başka kişi ise 6,3 TL ücret ödemiştir. Buna göre, 6,9 TL parası olan biri bu araçla en çok kaç metre yolculuk yapabilir?

- A) 4399
- B) 4400
- C) 4499
- D) 4500
- E) 4599

(Yol, metre türünden tam sayıdır.)

Soru

Cevap Performansı

4	5	6
E	D	E
A	C	A
B	B	C
D	E	D
C	A	B

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyin, aralarını çizgi ile birleştirin.

Doğru Cevaplar
E, D, E

7. Bir torbada 6 kırmızı, 3 sarı, 4 mavi, 5 yeşil bilye vardır. Bu torbadan iadesiz olarak, rastgele en az kaç çekim yapılmalıdır ki **aynı renkten bir çift bilye kesinlikle elde edilebilsin?**

- A) 2
B) 5
C) 6
D) 10
E) 18

8. Bir havuzun içinde bir miktar su vardır. Bu havuza 7 kova su eklenince, havuzun $\frac{1}{4}$ 'ü boş kalıyor. Su eklemek yerine, havuzdan 4 kova su alındıysa, havuzun $\frac{4}{5}$ 'i boş olacaktı. Buna göre, **boş havuz kaç kova su ile doldurulabilir?**

- A) 13
B) 14
C) 20
D) 21
E) 26

9. Bir iş yerinde çırak, kalpa ve ustalardan en az birer tane olmak üzere toplam 50 işçi çalışmaktadır. 1 günlük çalışma karşılığında, çıraklar 12'şer, kalfalar 16'şar ve ustalar 32'şer TL ücret almaktadırlar. **Bir günlük çalışma için işçilere toplam 800 TL ücret dağıtılan bu iş yerinde, en fazla kaç tane kalpa olabilir?**

- A) 40
B) 42
C) 45
D) 47
E) 48

Soru 9

Cevap Performansı

7	8	9
B	C	C
A	B	D
D	A	A
E	D	B
C	E	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarından doğru ile birleştir.

Doğru Cevaplar

B, C, C

10. Bir firma ürettiği her bir bardağı, bu bardakların paketlenmesi her bir kutuya ve bu kutuların konulduğu her bir koliye birer adet firma amblemi basıyor. Bu firma, her 6 bardağı bir kutuya ve her 10 kutuyu da bir koliye koyarak siparişleri gönderiyor.

Buna göre, 300 bardaklık bir siparişte toplam kaç amblem basılır?

- A) 355
- B) 360
- C) 365
- D) 370
- E) 375

11. Üç kutudaki toplam bilye sayısı 120'dir. Birinci kutudan 6 bilye alınır. İkinci kutuya 3 ve üçüncü kutuya 9 bilye eklenirse, kutulardaki bilye sayıları birbirine eşit olur. Buna göre başlangıçta

üçüncü kutuda kaç bilye vardı?

- A) 48
- B) 42
- C) 39
- D) 36
- E) 33

12. Volkan kumbarasına 10, 25 ve 50 kuruşluk madeni paralardan bir miktar atarak 455 kuruş biriktirmiştir. Volkan paralarını sayarken 10 kuruşlukları ayırdığında 325 kuruşunun, 25 kuruşlukları ayırdığında 280 kuruşunun, 50 kuruşlukları ayırdığında 305 kuruşunun olduğunu görüyor.

Buna göre, Volkan kumbarasına kaç tane madeni para atmıştır?

- A) 20
- B) 21
- C) 22
- D) 23
- E) 24

Soru

Cevap Performansı

10	11	12
A	D	E
B	C	A
C	A	B
D	B	D
E	E	C

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyin, aralarını çizgi ile birleştirin.

Doğru Cevaplar

A, D, E

KESİR PROBLEMLERİ

* Kesir problemlerinde verilen ifadenin önce $\frac{1}{a}$ 'si, sonra $\frac{1}{b}$ 'si ve daha sonra da $\frac{1}{c}$ 'si alındığında bilinmeyen ifadeye x demek yerine EKOK $(a, b, c) \cdot x$ demek daha kolay çözümlmesine yardımcı olacaktır.

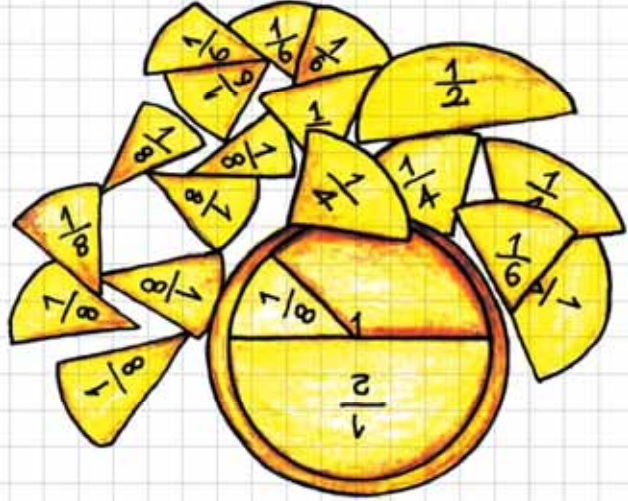
Bir diğer yol ise kesir problemlerinde bilinmeyen ifadeye x demek yerine paydaların çarpımı yani; $a \cdot b \cdot c \cdot x$ demektir.

Örneğin;

Bir yolun önce $\frac{1}{2}$ 'si daha sonra kalan yolun $\frac{2}{3}$ ve son kalan yolun $\frac{1}{5}$ 'i gidilirse geriye 16 km yol kaldığına göre, yolun tamamı kaç km'dir?

Bu tür kesir problemlerinde yolun tamamı için,

Yol = Ekok $(2, 3, 5) \cdot x = 30 \cdot x$ denir veya paydalar çarpılır.
 Yol = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x = 30 \cdot x$ denir.
 İlk gidilen yol = $30 \cdot \frac{1}{2} = 15x$ 'tir.
 Kalan yol = $30 \cdot x - 15 \cdot x = 15 \cdot x$



İkinci gidilen yol = $15 \cdot x \cdot \frac{2}{3} = 10 \cdot x$ 'tir.

Kalan yol = $15 \cdot x - 10 \cdot x = 5x$

Son gidilen yol = $5 \cdot x \cdot \frac{1}{5} = x$ 'tir.

Kalan yol = $5x - x = 4 \cdot x$ bulunur.

Kalan yol 16 km olduğuna göre;

$$4 \cdot x = 16$$

$$x = 4 \text{ bulunur.}$$

O hâlde yolun tamamı,

$$30 \cdot x = 30 \cdot 4 = 120 \text{ km'dir.}$$

**NOT**

Sayı problemlerinde kullandığımız denklem kurma yollarının aynısı kesir problemlerinde de kullanılır.

Çöz

Taksitle gömlek alan Ahmet
I. taksitte borcunun $\frac{3}{4}$ 'ünü,
II. taksitte kalan borcunun
 $\frac{1}{3}$ 'ünü ödüyor. Geriye 8 TL
borcu kalıyor.

Buna göre, alınan gömlek
kaç TL 'dir?

ÖĞREN

Ahmet'in aldığı gömleğin
fiyatı paydaların çarpımı
yani; $3 \cdot 4 = 12 \cdot x$ olsun.

I. taksitte ödenen miktar
 $= 12 \cdot x \cdot \frac{3}{4} = 9x$ 'tir.

Kalan borç $= 12 \cdot x - 9 \cdot x = 3 \cdot x$

II. taksitte ödenen miktar
 $= 3 \cdot x \cdot \frac{1}{3} = x$ 'tir.

Kalan borç $= 3 \cdot x - x = 2 \cdot x$ olur.
Kalan borç 8 TL verildiğine
göre;

$$2 \cdot x = 8$$

$$x = 4 \text{ bulunur.}$$

O hâlde gömleğin fiyatı;
 $12 \cdot x = 12 \cdot 4 = 48$ TL olur.

Çöz

Bir kovanın ağırlığı tamamı
suyla doluyken 12 kg,
 $\frac{3}{4}$ 'ü boşken ise 4,5 kg'dır.

Buna göre, boş kovanın
ağırlığı kaç kg'dır?

ÖĞREN

Boş kovanın ağırlığı K ve
kovadaki suyun ağırlığı $4 \cdot x$
olsun. Deponun tamamı suyla
doluyken ağırlığı 12 kg ol-
duğuna göre,

$$4 \cdot x + K = 12 \dots \text{I olur.}$$

Deponun $\frac{3}{4}$ 'ü boş ise $\frac{1}{4}$ 'ü
doludur. Deponun $\frac{1}{4}$ 'ü doluy-

ken ağırlığı 4,5 kg oldu-
ğuna göre,

$$x + K = 4,5 \dots \text{II olur.}$$

I ve II denklemleri ortak
çözülürse,

$$\begin{array}{r} 4 \cdot x + K = 12 \\ -/ x + K = 4,5 \\ \hline 3x = 7,5 \end{array}$$

$$x = 2,5 \text{ kg bulunur.}$$

Boş deponun ağırlığı soruldu-
ğundan bulunan x değeri den-
klemlerin herhangi birinde
yerine yazılır.

$$x + K = 4,5 \quad 2,5 + K = 4,5$$

$$K = 2 \text{ kg'dır.}$$

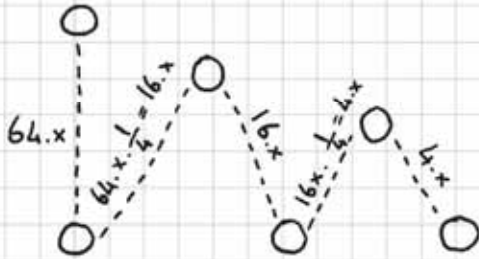
ÇÖZ

Bir top belli bir yükseklikten bırakılıyor. Top yere her çarptığında bırakıldığı yüksekliğin $\frac{1}{4}$ 'ü kadar zıplıyor.

Top yere 3 kez çarptığı anda aldığı toplam yol 130cm olduğuna göre, topun ilk bırakıldığı yükseklik kaç cm'dir?

ÖĞREN

Top yere 3 kez çarptığı ve her seferinde $\frac{1}{4}$ 'ü kadar zıplayacağı için topun ilk bırakıldığı yükseklik $64 \cdot x$ cm olsun.



1. çarpış 2. çarpış 3. çarpış
Top yere 3. kez çarptığı anda aldığı toplam yol 130 cm olduğuna göre;

$$64 \cdot x + 16 \cdot x + 16 \cdot x + 4 \cdot x + 4 \cdot x = 130$$

$$104 \cdot x = 130$$

$$x = \frac{130}{104}$$

olur.

O hâlde, topun bırakıldığı ilk yükseklik $64 \cdot x = 64 \cdot \frac{130}{104} = 80$ cm bulunur.

ÇÖZ

Bir su deposunun $\frac{2}{3}$ 'ü doluyken ağırlığı 42 kg, $\frac{3}{5}$ 'i doluyken ağırlığı 38 kg'dır. Buna göre, boş depolanın ağırlığı kaç kg'dır?

ÖĞREN

Boş depolanın ağırlığı Δ ve depodaki suyun ağırlığı $15 \cdot x$ olsun. Deponun $\frac{2}{3}$ 'ü doluyken ağırlığı 42 kg olduğuna göre,

$$15 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \Delta = 42$$

$$10 \cdot x + \Delta = 42 \dots \text{I olur.}$$

Deponun $\frac{3}{5}$ 'i doluyken ağırlığı 38 kg olduğuna göre,

$$15 \cdot x \cdot \frac{3}{5} + \Delta = 38$$

$$9 \cdot x + \Delta = 38 \dots \text{II olur.}$$

I ve II denklemleri ortak çözümlerse,

$$\begin{array}{r} 10 \cdot x + \Delta = 42 \\ -/ 9 \cdot x + \Delta = 38 \\ \hline x = 4 \text{ bulunur.} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{2. eşitlik "-" ile çarpılır.} \end{array} \right)$$

Boş depolanın ağırlığını bulmak için bulunan x değeri denklemlerin herhangi birinde yerine yazılır.

$$10 \cdot x + \Delta = 42$$

$$10 \cdot 4 + \Delta = 42$$

$$40 + \Delta = 42$$

$$\Delta = 2 \text{ kg'dır.}$$

1. Bir kısmı su ile dolu olan bir havuza 8 kova su ilave edilirse, havuzun $\frac{1}{6}$ 'sı kadar su taşıyor. Aynı havuzdan aynı kova ile ilave edilmeyip 8 kova su alınırsa $\frac{5}{6}$ 'sı boş kalıyor.

Buna göre, başlangıçta havuzun kaçta kaç su ile doludur?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

2. Bir bardak suyun $\frac{1}{4}$ 'ünün $\frac{1}{2}$ 'sini içen Faruk, daha sonra kalanın $\frac{4}{5}$ 'ini de içiyor.

Buna göre, en son kalan su miktarının ikinci içilen su miktarına oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

3. Bir memur maaşının $\frac{1}{3}$ 'ünü ev kirasına, $\frac{1}{4}$ 'ünü mutfak masraflarına, $\frac{1}{5}$ 'ini de diğer ev masraflarına harcıyor. Memurun geriye 260 TL'si kalıyor. Buna göre, memurun maaşı kaç TL'dir?

- A) 140 B) 300 C) 400
D) 800 E) 1200

4. Bir otobüsteki erkek yolcu sayısı tüm yolcu sayısının $\frac{2}{3}$ 'üdür. Otobüsten 7 erkek inip, 8 bayan bindiğinde, otobüsteki bayan yolcu sayısı, tüm yolcu sayısının yarısı olmaktadır.

Buna göre, otobüste başlangıçta kaç tane erkek yolcu vardır?

- A) 15 B) 30 C) 40
D) 60 E) 75

Soru

Cevap Performansı

1	2	3	4
B	D	E	B
C	E	A	D
D	A	B	E
E	B	C	A
A	C	D	C

Performansını görmek için cevaplarını işaretle, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
B, D, E, B

YAŞ PROBLEMLERİ

* Problemin çözümü için denklemler kurarken aşağıdaki özelliklere dikkat ediniz.

- Bir kişinin yaşı x olsun.
a yıl sonraki yaşı $x+a$,
a yıl önceki yaşı $x-a$ olur.

Örneğin;

Bir kişinin yaşı 20 olsun 5 yıl sonraki yaşı, $20+5=25$ olur.

- Bir kişinin yaşı x olsun.
a yıl önce dogsaydı yaşı $x+a$
a yıl sonra dogsaydı yaşı $x-a$ olurdu.

Örneğin;

1980 yılında dogmuş birinin yaşı 32 olsun Eğer bu kişi 2 yıl sonra dogsaydı yaşı $32-2=30$ olurdu.

- n kişinin yaşları toplamı x olsun.

a yıl sonraki yaşları toplamı

$$x + n.a$$

a yıl önceki yaşları toplamı

$$x - n.a \text{ olur.}$$

Örneğin;

3 kişinin yaşları toplamı 40 olsun. 6 yıl önce bu kişilerin her biri 6 yaş küçüleceğinden yaşları toplamı $6.3=18$ azalır. 6 yıl önceki yaşları toplamı $40-18=22$ olur.



ÇÖZ

Anne ile kızının yaşları toplamı 38'dir.

4 yıl sonra annenin yaşı kızının yaşının 3 katından 2 eksik olacağına göre, annenin bugünkü yaşı kaçtır?

ÖĞREN

Anne ile kızın yaşları toplamı 38 verilmiştir. Anne x yaşında ise kızı $38-x$ yaşında olur.

Anne	Kız
Bugünkü yaşları x	$38-x$
4 yıl sonra $x+4$	$38-x+4$

4 yıl sonra annenin yaşı kızının yaşının 3 katından 2 eksik olacağına göre,

$$x+4 = 3 \cdot (38-x+4) - 2$$

$$x+4 = 3 \cdot (42-x) - 2 \Rightarrow$$

$$x+4 = 126 - 3x - 2$$

$$x+3x = 126 - 2 - 4$$

$$4x = 120$$

$$x = 30 \text{ bulunur.}$$

O hâlde, annenin bugünkü yaşı 30'dur.

**NOT**

• Yaş farkı sabittir, hiçbir durumda değişmez.

Örneğin;

İki kardeşin yaş farkı 8 olsun 10 yıl sonra da bu iki kardeşin yaş farkı 8 olacaktır.

• Bir kişi doğduğunda "0" yaşındadır.

ÇÖZ

Bir annenin yaşı 2 çocuğun yaşları toplamının 2 katından 4 fazladır.

5 yıl önce annenin yaşı çocuklarının yaşları toplamından 24 fazla olduğuna göre, annenin yaşı kaçtır?

ÖĞREN

	Anne	2 çocuğun yaşları top.
Bugünkü yaşları	$2x+4$	x
5 yıl önce	$2x+4-5$	$x-2.5$
		(2 çocuk olduğu için)

$$2x-1 = x-10+24$$

$$2x-1 = x+14$$

$$x = 15 \text{ bulunur.}$$

$$\text{Annenin yaşı} = 2x+4 = 2 \cdot 15+4 = 34 \text{ elde edilir.}$$

ÇÖZ

Bir annenin yaşı, oğlunun yaşının 4 katıdır.

Oğlunun yaşı, annenin bugünkü yaşına geldiğinde anne ile oğlunun yaşları toplamı 88 olacağına göre, annenin bugünkü yaşı kaçtır?

ÖĞREN

Bir annenin yaşı, oğlunun yaşının 4 katı olduğuna göre, oğlu x yaşında ise anne $4x$ yaşında olur.

	Oğlu	Anne
Bugünkü yaşı	x	$4x$
Oğlu annenin yaşında iken	$4x$	$7x$

Oğlu, annenin bugünkü yaşında (yani $4x$ yaşında) iken $4x-x=3x$ yıl geçmiştir. O hâlde, bugün $4x$ yaşında olan anne $3x$ yıl sonra $4x+3x=7x$ yaşında olur.

Oğlu, annenin bugünkü yaşındayken anne ile oğlunun yaşları toplamı 88 olduğuna göre;

$$4x+7x=88$$

$$11x=88 \quad x=8 \text{ bulunur.}$$

$$\text{Buna göre, annenin bugünkü yaşı} \\ 4x=4 \cdot 8 = 32 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

Lise son sınıfıta tanışan Ali, Leyla ve Sude tanıştıkları zamanki yaş ortalaması 18'dir. Aradan belli bir zaman geçtikten sonra bu üç arkadaş eşleri ile birlikte tekrardan görüşmüşlerdir. Bu altı kişinin yaş ortalaması 32 olmuştur. Bu üç arkadaşın eşleri ile aralarındaki yaş farkı sırasıyla 2, 4 ve 6 olmaktadır.

Buna göre, Ali, Leyla ve Sude tanışmalarından kaç yıl sonra tekrardan bir araya gelmişlerdir?

ÖÇEREN

Ali	Leyla	Sude	
a	b	c	$\Rightarrow$ (Tanıştıkları zamanki yaşları)
$a+x$	$b+x$	$c+x$	$\Rightarrow$ (Aradan x yıl geçtikten sonra tekrar görüşsünler)
$a+x-2$	$b+x-4$	$c+x-6$	$\Rightarrow$ (Eşlerinin yaşları)

Soruda verilenleri kullandık şimdi çözüme geçelim.

$$\frac{a+b+c}{3} = 18 \Rightarrow a+b+c = 54$$

İkinci görüşmelerinde 6 kişi olduklarından 6 kişinin yaş ortalaması,

$$\frac{a+x+b+x+c+x+a+x-2+b+x-4+c+x-6}{6} = 32$$

$$2(a+b+c) + 6x - 12 = 192$$

$$2 \cdot 54 + 6x - 12 = 192$$

$$6x = 192 - 108 + 12$$

$$6x = 96$$

$$x = 16$$

Yani 16 yıl sonra tekrar bir araya gelmişlerdir.

1. Bir çiftin iki çocuğundan ilki doğduğunda anne 26 yaşında, ikincisi doğduğunda baba 34 yaşındaydı, iki çocuk arasındaki yaş farkı 5 olduğuna göre, **anne ile baba arasındaki yaş farkı kaçtır?**

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) 8

2. ab iki basamaklı bir doğal sayı olmak üzere, Orhan $19ab$ yılında doğmuştur. Orhan 1996 yılında ab yaşında olduğuna göre, **2012 yılında kaç yaşındadır?**

- A) 48
- B) 54
- C) 56
- D) 60
- E) 64

3. Burçin ile Aslı arasında 3 yaş, Aslı ile Ferhat arasında da 5 yaş fark vardır. Burçin bugün 21 yaşında olduğuna göre, **Ferhat'ın yaşı aşağıdakilerden hangisi olamaz?**

- A) 13
- B) 17
- C) 19
- D) 23
- E) 29

4. Bir babanın yaşı, iki çocuğunun yaşları toplamının 2 katından 2 fazladır. Baba ve çocuklarının yaşları toplamı 50 olduğuna göre, **kaç yıl sonra babanın yaşı çocuklarının yaşları toplamına eşit olur?**

- A) 7
- B) 9
- C) 12
- D) 15
- E) 18

Cevap Performansı

1	2	3	4
A	E	B	E
B	A	C	B
C	B	D	C
D	C	E	D
E	D	A	A

Performansını görmek için cevaplarını işarette, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
A, E, B, E

5. Aleyna x yılında doğmuştur. Efe ise bugün y yaşındadır. Aleyna, Efe'nin bugünkü yaşına geldiğinde, Efe'nin yaşı Aleyna'nın bugünkü yaşının 2 katı kadar olacaktır. Buna göre, içinde bulunduğumuz yılın x ve y cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{x+2y}{3}$
 B) $\frac{2x+y}{2}$
 C) $x + \frac{2y}{3}$
 D) $\frac{3x}{2} - y$
 E) $x + \frac{y}{2}$

6. Cemre bugün 24 yaşındadır. Cemre, Aybüke'nin bugünkü yaşındayken, Aybüke'nin yaşı, bugünkü yaşının yarısı kadardır. Buna göre, Aybüke bugün kaç yaşındadır?

- A) 16
 B) 15
 C) 20
 D) 18
 E) 12

7. Oğuz, Mehmet ve Öztürk'ün bugünkü yaşları toplamı 102'dir. Oğuz, Mehmet'in yaşındayken, Mehmet de Öztürk'ün yaşında olduğuna göre, Mehmet bugün kaç yaşındadır?

- A) 30
 B) 32
 C) 34
 D) 36
 E) 37

8. Üç kardeşin bugünkü yaşları toplamı 40'dir. Ortaanca kardeş büyük olanın yaşına geldiğinde yaşları toplamı 46, küçük kardeş büyük olanın yaşına geldiğinde yaşları toplamı 58 olacağına göre, büyük kardeş bugün kaç yaşındadır?

- A) 18
 B) 15
 C) 14
 D) 17
 E) 16

Cevap Performansı

5	6	7	8
C	A	C	E
D	B	D	A
E	C	E	B
A	D	A	C
B	E	B	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
 C, A, C, E

İŞÇİ PROBLEMLERİ

* İşçi Problemlerinde bir veya birden fazla işçinin ayrı ayrı veya beraber çalışarak işi bitirmeleriyle ilgili sorular söz konusudur.

Örneğin;

Sinan bir işi a saatte,
Meryem aynı işi b saatte yaparsa;

Sinan 1 saatte işin $\frac{1}{a}$ 'sini yapar.

Meryem 1 saatte işin $\frac{1}{b}$ 'sini yapar.

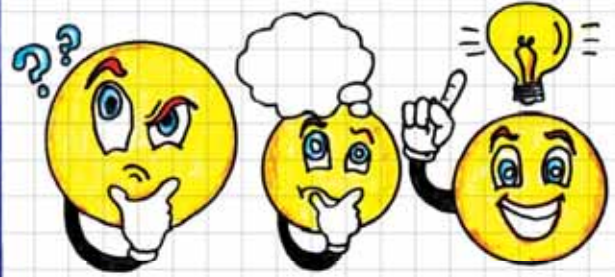
Sinan ve Meryem beraber bir saatte bir işin $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 'sini yaparlar.

Sinan ve Meryem beraber 3 saatte işin $3 \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 'sini yaparlar.

Sinan 3, Meryem 2 saat çalışırsa işin $3 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{1}{b}$ 'sini yaparlar.

Bu bilgiler ışığında işçi problemleri çözülürken problemin içinde;

İşçilerin işin tamamını tek başlarına ne kadar sürede bitirdiklerine bakılır.



Eğer tek başlarına bitirme süreleri verilmemişse $x, y, a, b, \dots$ gibi bilinmeyenler kullanılır.

İşçilerin kaç gün çalıştıklarına bakılır.

İşin yapılması sırasında kaç işçinin çalıştığına bakılır.

İşçiler çalıştıktan sonra işin kaçta kaçının bittiğine bakılır. Eğer işin tamamı bitirilmişse yerine 1 yazılır.



Sinan bir işi a saatte,
Meryem aynı işi b saatte tamamlasın.

İkisi beraber x saat çalıştıktan sonra Sinan işi bırakıyor. Kalan işi Meryem tek başına y saatte yapıyorsa denklem;
 $x \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + y \cdot \frac{1}{b} = 1$
biçiminde kurulur.

**NOT**

Sinan bir işi a saatte, Meryem aynı işi b saatte tamamlasın.

İkisi birlikte aynı işi kaç günde tamamlar.

<u>Sinan</u>	<u>Meryem</u>
a saatte	b saatte

İşçiler beraber x gün çalışmış olsun.

İşin yapılması sırasında kimlerin çalıştığı verilmiş. İkisi birlikte dediği için Sinan ve Meryem kabul edilir. İşin tamamı denildiği için yapılan iş 1 kabul edilir.

$$x \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1$$

kaç işçi çalışmış

kaç saat çalışmış

işçilerin tek başlarına bitirme süreleri

işin ne kadarı bitmiş

Çöz

Merve bir işin tamamını tek başına 9 günde, Şule aynı işin tamamını tek başına 12 günde bitirebiliyor.

Buna göre, Merve ve Şule 2 gün beraber çalıştıklarında işin kaçta kaçı kalır?

ÖĞREN

Merve bir işin tamamını 9 günde bitirebildiğine göre, 2 günde işin $\frac{2}{9}$ 'unu; Şule işin tamamını 12 günde bitirebildiğine göre, 2 günde işin $\frac{2}{12}$ 'sini yapar.

O hâlde, ikisi beraber 2 günde işin;

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} + \frac{2}{12} &= \frac{8+6}{36} \\ &= \frac{14}{36} \\ &= \frac{7}{18} \text{ 'ini yaparlar.} \end{aligned}$$

Bu durumda işin $1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$ 'i kalır.

ÇÖZ

Cansu bir işi Tuğba'nın bitirdiği sürenin 3 katı sürede bitirebilmektedir.

İkisi birlikte bu işi 9 günde bitirebildiklerine göre, Cansu bu işin tamamını tek başına kaç günde bitirir?

ÖĞREN

Cansu bir işi Tuğba'nın bitirdiği sürenin 3 katı sürede bitirdiğine göre, Tuğba'nın işi bitirme süresi x kabul edilirse Cansu'nun işi bitirme süresi $3x$ olur. İkisi beraber bu işi 9 günde bitirdiklerine göre;

$$9 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} \right) = 1$$

$$9 \cdot \left(\frac{3+1}{3x} \right) = 1$$

$$9 \cdot \frac{4}{3x} = 1$$

$$36 = 3x$$

$$x = 12 \text{ bulunur.}$$

O halde, Cansu bu işin tamamını tek başına;

$$3 \cdot x = 3 \cdot 12 = 36 \text{ günde bitirir.}$$

O halde, Aslı bu işi tek başına 10 saatte, Emre aynı işi tek başına 30 saatte tamamlar. İkisi birlikte bu işi x saatte tamamlarsa;

$$x \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} \right) = 1 \Rightarrow x \cdot \frac{4}{30} = 1 \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ saat bulunur.}$$

ÇÖZ

Aslı bir işin $\frac{2}{5}$ 'ini 4 saatte, Emre ise aynı işin $\frac{5}{6}$ 'sini 25 saatte tamamlıyor.

Buna göre, ikisi birlikte işin tamamını kaç saatte tamamlar?

ÖĞREN

Aslı ve Emre'nin işin belli bir kısmını bitirme süresi verildiğinden doğru orantı yardımıyla işin tamamını kaç saatte bitirdikleri bulunur.

Aslı

$\frac{2}{5}$ 'ini 4 saatte tamamlıyorsa

1'i a saatte tamamlar

$$\frac{2a}{5} = 4$$

D.O.

$$2a = 20 \quad a = 10 \text{ saatte}$$

Emre

$\frac{5}{6}$ 'sini 25 saatte tamamlıyorsa

1'i b saatte tamamlar

$$\frac{5b}{6} = 25$$

D.O.

$$5b = 150 \quad b = 30 \text{ saatte}$$

**NOT**

Eğer soruda bir işçinin işin belli bir kısmını ne kadar sürede bitirdiği verilmişse, doğru orantı yoluyla işçinin işin tamamını ne kadar sürede bitirdiği bulunur.

Örneğin;

Ali bir işin $\frac{2}{3}$ 'ünü 12 günde

bitirirse işin tamamını,

$\frac{2}{3}$ 'ünü 12 günde bitiriyorsa

(Tamamını) 1'i x günde bitirir

$$\frac{2x}{3} = 12$$

(D.O.)

$$2x = 36 \quad x = 18 \text{ günde bitirir.}$$

**UYARI**

Çalışma hızı ile iş bitirme

- süresi ters orantılıdır.

Örneğin;

	A işçisi	B işçisi	C işçisi
Çalışma hızları	2V	V	3V

olsun. Çalışma hızlarının Ekokları bulunur. Ekok $(2V, V, 3V) = 6V$ 'dır. Çalışma hızlarını 6'ya tamamlayan çarpan bitirme sürelerini verir. O hâlde; Bitirme süreleri

A işçisi	B işçisi	C işçisi	olur.
3x	6x	2x	

ÇÖZ

Eylül bir işi tek başına 18 saatte Berkay ise aynı işi tek başına 12 saatte bitiriyor. İkisi birlikte işe başladıktan 3 saat sonra Eylül işi bırakıyor.

Buna göre, Berkay kalan işi tek başına kaç saatte bitirir?

ÖĞREN

Bu işi Eylül 18 saatte Berkay 12 saatte bitiriyorlar. Birlikte 3 saat çalıştıktan sonra Eylül işi bırakıyor. Kalan işi Berkay x saatte bitirirse;

$$3. \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{12} \right) + x. \frac{1}{12} = 1$$

$$3. \frac{5}{36} + \frac{3x}{36} = 1$$

$$15 + 3x = 36$$

$$3x = 21$$

$$x = 7 \text{ bulunur.}$$

O hâlde, Berkay kalan işi 7 saatte bitirir.

"Hayal gücü" olmayan
insanın
kanatları yoktur."

Muhammed Ali

ÇÖZ

Fehmi'nin çalışma hızı Melih'in çalışma hızının 4 katıdır.

Buna göre, ikisi birlikte aynı işi 8 günde bitirebildiğine göre, Fehmi aynı işi tek başına kaç günde bitirir?

ÖĞREN

	Fehmi	Melih
Çalışma hızları	$4x$	x
EKOK ($4x, x$) = $4x$ olduğundan		
Bitirme süreleri	x	$4x$ olur.

İkisi beraber çalışarak işi 8 günde bitirebildiklerine göre;

$$8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} \right) = 1$$

$$8 \cdot \frac{5}{4x} = 1 \Rightarrow 40 = 4x$$

$$x = 10 \text{ bulunur.}$$

O hâlde, bu işi Fehmi tek başına 10 günde bitirir.



NOT

İşçi sayısı ile işin bitirilmesi süresi ters orantılıdır.

Örneğin:

15 işçinin 10 saatte yaptığı işi 3 işçinin kaç saatte yaptığını bulmak için

15 işçi	→	10 saatte
3 işçi	→	x saatte

$$3 \cdot x = 15 \cdot 10 \quad \text{T.D.} \quad x = 50 \text{ gün}$$

ÇÖZ

Ulaş bir işi yalnız başına a saatte, Sertaç ile birlikte 6 saatte yapıyor. Sertaç bu işi yalnız başına Ulaş'tan daha uzun sürede yapıyor.

Buna göre, a 'nın değer aralığı nasıl olur?

ÖĞREN

Sertaç bu işi b saatte yapıyor olsun. Sertaç bu işi Ulaş'tan daha uzun sürede yaptığına göre, $a < b$ olur. Eğer Sertaç ile Ulaş işi aynı saatte bitiriyor olsaydı ve bitirme süreleri 6 saat olduğundan;

$$6 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1$$

$$6 \cdot \frac{2}{b} = 1 \quad b = 12 \text{ olurdu.}$$

O hâlde, $a < b$ yani, $a < 12$ olur. Birden fazla işçi birlikte çalıştığında işçilerin işi tek başına bitirme süreleri, birlikte bitirme sürelerinden fazla olacağından $a > 6$ olur. Bu durumda a için $6 < a < 12$ eşitsizliği oluşur.

1. Eşit kapasiteli 8 işçi birlikte çalışarak bir işin $\frac{2}{5}$ 'ini 4 günde bitiriyorlar. Buna göre, bu işçilerden bir tanesi tek başına aynı işi kaç günde bitirebilir?

- A) 40
- B) 60
- C) 80
- D) 100
- E) 120

2. Eşit kapasiteli bir grup işçiden 4 tanesi çalışmadığında 15 saatte bitirilen bir iş, 6 işçi çalışmadığında 20 saatte bitirilebiliyor. Buna göre, grupta kaç kişi vardır?

- A) 12
- B) 15
- C) 18
- D) 20
- E) 24

3. Bir işi Uğur, Alparslan ve Sevim tek başlarına sırasıyla 12, 18 ve 9 günde bitirebiliyor.

Uğur ve Alparslan birlikte 4 gün çalıştıktan sonra işten ayrılır ve kalan işi Sevim tek başına tamamlarsa, bu iş toplam kaç günde bitirilmiş olur?

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 10
- E) 12

4. Serdar'ın 15 saatte yaptığı işin 3 katını Veyssel aynı sürede yapabiliyor. Buna göre, Serdar ve Veyssel birlikte, Serdar'ın 24 saatte yaptığı bir işi kaç saatte yapabilirler?

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 9
- E) 10

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	A	C	B
A	B	B	C
B	C	D	D
D	E	A	E
E	D	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işarette, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
C, A, C, B

5. $x < y < z$ olmak üzere, bir işi tek başlarına I. işçi x saatte, II. işçi y saatte, III. işçi 2 saatte bitirebiliyorlar. Aynı işi üçü birlikte çalışarak 6 saatte bitirebildiklerine göre, x 'in en büyük tam sayı değeri kaçtır?

- A) 20
B) 19
C) 18
D) 17
E) 16

6. Sefa'nın 10 günde bitirebildiği bir işi Emre 40 günde bitirebilmektedir.

İkisi birlikte bu işi kaç günde bitirirler?

- A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

7. Gülseren bir işi tek başına x günde, Hacı ise aynı işi tek başına $\frac{x}{3}$ günde bitirebilmektedir. İkisi birlikte bu işi 5 günde bitirebildiklerine göre, x kaçtır?

- A) 10
B) 15
C) 18
D) 20
E) 25

Soru

Cevap Performansı

5	6	7
D	D	C
E	B	A
A	C	B
B	E	D
C	A	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

D, D, C

YÜZDE-KÂR-ZARAR PROBLEMLERİ

Yüzde Problemleri

Yüzde hesaplamaları;

x sayısının %a'sı, $x \cdot \frac{a}{100}$ 'dür.

x sayısının %a fazlası (arttırılırsa),
 $x + x \cdot \frac{a}{100} = x \cdot \frac{(100+a)}{100}$ 'dür.

x sayısının %a eksigi (azaltılırsa),
 $x - x \cdot \frac{a}{100} = x \cdot \frac{(100-a)}{100}$ 'dür.

- 20 sayısının %30'u

$$20 \cdot \frac{30}{100} = 6 \text{ 'dür.}$$



ÖRNEK

- 40 sayısının %20 fazlası =
 $40 \cdot \left(\frac{100+20}{100} \right) = 48$

- 80 sayısının %90 eksigi =
 $80 \cdot \left(\frac{100-90}{100} \right) = 8$



-NOT-

Genel olarak, yüzdesi hesaplanacak sayı değerini x almak yerine 100 x almak işlem kolaylığı sağlar.



ÇÖZ

a sayısı b sayısının %80' i dir.

Buna göre, b sayısı a sayısının % kaçıdır?

ÖĞREN

b sayısı 100 x olsun a sayısı b sayısının %80'i olduğuna göre;

$$a = 80x \text{ olur.}$$

b sayısı a sayısının yüzde y'si olsun.

$$b = a \cdot \frac{y}{100} \Rightarrow 100x = 80x \cdot \frac{y}{100}$$

$$y = 125 \text{ bulunur.}$$

O hâlde, b sayısı a sayısının %125 'i olur.

ÇÖZ

A sınıfındaki öğrencilerin %40'ı, B sınıfına geçince A ve B sınıflarındaki öğrenci sayısı eşit oluyor.

Buna göre, başlangıçta B sınıfındaki öğrencilerin sayısı, A sınıfındaki öğrencilerin yüzde kaçıdır?

ÖĞREN

A sınıfındaki öğrenci sayısı $100x$ olsun. A sınıfındaki öğrencilerin %40'ı B sınıfına geçtiğine göre, $100x \cdot \frac{40}{100} = 40x$ öğrenci B sınıfına geçer.

Buna göre, A sınıfında $100x - 40x = 60x$ öğrenci kalır.

Bu durumda A sınıfı ve B sınıfındaki öğrenci sayıları birbirine eşit olduğuna göre, B sınıfında da $60x$ öğrenci olur.

O hâlde, B sınıfında başlangıçta $60x - 40x = 20x$ öğrenci vardır.

A sınıfı	B sınıfı
$100x$	$20x$
$-40x$	$-40x$
$\longrightarrow 60x$	$\longrightarrow 60x$

Bu durumda başlangıçta B sınıfındaki öğrenciler A sınıfındaki öğrencilerin %20'sidir.

ÇÖZ

Bir memur, maaşına yapılan %15 zam yerine daha yüksek olan 102 ₺ zammı tercih etmiştir.

Bu memurun zamatsız maaşı en fazla kaç ₺ olabilir?

ÖĞREN

Memurun maaşı $100x$ olsun. Memurun maaşına %15 zam yapıldığında;
 Memurun maaşı $= 100x \cdot \frac{(100+15)}{100}$
 $= 115x$ 'tir.

Memurun maaşına 102 ₺ zam yapıldığında;

Memurun maaşı $= 100x + 102$ TL
 Memur daha yüksek olan 102 TL'lik zammı tercih ettiğine göre;

$$100x + 102 > 115x$$

$$102 > 15x$$

$$\frac{34}{5} > x \quad 6,8 > x \text{ olur}$$

Memurun zamatsız maaşı $100x$ olduğuna göre;

$$100 \cdot 6,8 > 100x$$

$$680 > 100x \text{ olur.}$$

Dolayısıyla memurun zamatsız maaşı 680 TL'den daha az olacaktır.

Çöz



Adil usta, kırmızı ve beyaz renkli boyaları kullanarak pembe renkli boya elde etmeyi düşünüyor. Boyaları karıştırmadan önce

- * Beyaz boyadan %60
- * Kırmızı boyadan %40 kullanmayı planlıyor.

Ancak boyaları karıştırmaya başlarken kırmızı boyanın fazla geldiğini anlamış ve kullanacağı kırmızı boyanın %80'ini kullanmış. Kullanmadığı kırmızı renkli boya yerine beyaz renkli boya ilave etmiştir.

Buna göre, Adil usta kullanacağı beyaz renkli boyayı planladığından yüzde kaç daha fazla kullanmıştır?

Öğren

Başlangıçtaki pembe boya miktarına 100x dersek,

$\frac{K}{40x}$	$\frac{B}{60x}$	
$\frac{40x \cdot 80}{100} = 32x$	$60x + 8x$	
$60x$	$8x$	artıyorsa
$100x$	$?$	
$60 \cdot ? = 8 \cdot 100$ $? = \frac{80}{6}$ $? = \frac{40}{3}$ olur.		

Çöz

Bir çiftçi, tarlasının %25'ine patates, %20'sine soğan geri kalanında domates ekmeyi planlıyor. Daha sonra patates ekeceği alanın az olduğunu anlayarak domates ekeceği alanın bir kısmına patates ekıyor. Bu durumda domates ve soğanı ekeceği alanlar eşit oluyor. Buna göre, son durumda patates ekeceği alan yüzde kaç artmıştır?

Öğren

Patates

25k
↓
60k

Soğan

20k
↓
20k

Domates

55k
↓
20k

25k $\xrightarrow{35k \text{ artmış}}$ 60k

25	35
100	x

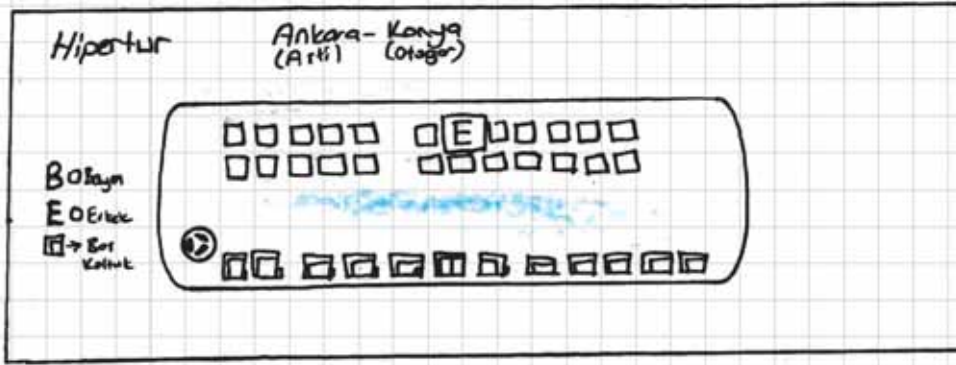
x = 140

% 140 artmıştır.

" Keskin bıçak olmak için
çok çekiç yemek gerekir. "

Türk Atasözü

Çöz



Bir otobüs firmasında tek kişilik koltukların bilet fiyatı çift kişilik koltukların bilet fiyatından %25 daha pahalıdır. Ayrıca bu otobüs firması erken rezervasyon yapılması durumunda her iki koltuk bileti için %15 indirim uygulamaktadır.

Buna göre, erken rezervasyon yapılmış çift kişilik 25 koltuk fiyatıyla, rezervasyon yapmadan kaç tane tek kişilik koltuk bileti alınır?

Öğren

Tek Kişilik

125

$$125 \cdot x = 85 \cdot 25$$

$$5x = 85$$

$$x = 17$$

Yani 17 tane bilet alınır.

Çift Kişilik

100

85

%15 indirim

85

ÇÖZ

Aşağıdaki şekilde verilen net ağırlığı 120 gr olan bir kutu çilekli süt verilmiştir.



Bu çilekli sütün şeker oranı çok fazla diye eleştiriler gelince firma şeker oranını %10 azaltıp aynı ağırlıkta çilek eklemiştir. Süt ve diğer olarak tanımlanan madde miktarına dokunulmamıştır.

Bu firma aynı ağırlıkta bir çilekli süt yapmayı planladığına göre, çilek miktarını yüzde kaç arttırmalıdır?

ÖĞREN

Çilekli sütün içerisindeki maddelere bakalım.

$$120 \cdot \frac{60}{100} = 72 \text{ gr süt}$$

$$120 \cdot \frac{15}{100} = 18 \text{ gr şeker}$$

$$120 \cdot \frac{20}{100} = 24 \text{ gr çilek}$$

$$120 \cdot \frac{5}{100} = 6 \text{ gr (diğer şeker oranını \%10 azaltırsak)}$$

$$\frac{18 \cdot 10}{100} = 1,8 \text{ (çileğe ekleyeceğiz)}$$

$$\begin{array}{r} 24 \times 18 \\ 100 \times \end{array}$$

artırıyorsak;

$$24 \cdot x = 100 \cdot 18$$

$$x = 7,5 \text{ (Çilek miktarı \% 7,5 arttırılmalı).}$$

GÖR

Dönem içerisinde öğrencilerine iki sınav yapan bir öğretmen, her bir öğrencisinin 1. sınav puanının %30'u ile 2. sınav puanının %70'ini toplayarak o öğrencisine ait dönem sonu puanını oluşturmak istemektedir. Ancak hesaplamada yaptığı bir hata sonucu öğrencilerden Aslı'nın dönem sonu puanını, 1. sınav puanının %70'i ile 2. sınav puanının %30'unu toplayarak hesaplamıştır. Öğretmen bu hatayı düzelttiğinde Aslı'nın dönem sonu puanı 4 artarak 82 olmuştur.

Buna göre, Aslı girdiği iki sınavda toplam kaç puan almıştır?

BİREN

Aslı'nın 1. sınavda aldığı puan x , ikinci sınavda aldığı puan y olsun. Öğretmen sınavı doğru hesapladığında Aslı'nın puanı 4 puan artıp 82 oluyorsa yanlış hesaplamada puanı 78'dir.

$$\frac{x \cdot 30}{100} + \frac{y \cdot 70}{100} = 82 \rightarrow \text{Doğru hesaplama}$$

$$\frac{x \cdot 70}{100} + \frac{y \cdot 30}{100} = 78 \rightarrow \text{Yanlış hesaplama}$$

$$4y - 4x = 40$$

$$y - x = 10$$

1

Doğru hesaplamadaki puanı

$$\frac{x \cdot 30}{100} + \frac{y \cdot 70}{100} = 82$$

$$3x + 7y = 820$$

2

1. ve 2. denklemden ortak çözüm yaparsak

$$3x + 7y = 820$$

$$+ 3/ y - x = 10$$

$$10y = 850$$

$$y = 85, x = 75 \text{ bulunur.}$$

$$x + y = 85 + 75$$

$$= 160 \text{ bulunur.}$$

GÖZ



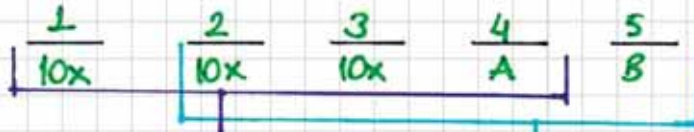
Bir öğretmen, sınıfındaki öğrencilere hediye olarak her biri farklı marka 5 paket çikolata getirmiş. Getirdiği çikolatalar ile ilgili aşağıdaki bilgiler bilinmektedir.

- ★ Paketlerin hepsinde eşit sayıda çikolata vardır.
- ★ Açılan ilk üç paketteki çikolataların hepsi sınıfa dağıtılmış.
- ★ Açılan ilk dört paketteki çikolataların % 90'ı, son dört paketteki çikolataların % 85'i sınıfa dağıtılmıştır.

Buna göre, açılan kutulardan sonuncusundaki çikolataların yüzde kaç sınıfa dağıtılmıştır?

DÜŞÜN

Her bir pakette $10x$ tane çikolata olduğunu varsayalım. İlk 3 paketteki çikolataların hepsi dağıtılmış 4. ve 5. paketteki çikolataların ne kadar dağıtıldığı bilinmiyor.



$$30x + A = 40x \cdot \frac{90}{100}$$

$$30x + A = 36x$$

$$A = 6x$$

$$20x + A + B = 40x \cdot \frac{85}{100}$$

$$20x + A + B = 34x$$

$$20x + 6x + B = 34x$$

$$B = 8x$$

Bizden B'yi istediği için doğru orantıda

$$\frac{10x}{100} = \frac{8x}{?}$$

$$? = 80$$

Son açılan paketin % 80'i sınıfa dağıtılmıştır.

Kâr-Zarar Problemleri

Satılan bir ürün için;

- * Alış Fiyatı + Kâr = Satış Fiyatı'dır
- * O hâlde, üründen kâr ediliyorsa;

Satış Fiyatı > Alış Fiyatı'dır.

- * Alış Fiyatı - Zarar = Satış Fiyatı'dır
- * O hâlde, üründen zarar ediliyorsa;

Satış Fiyatı < Alış Fiyatı'dır.

- * Alış fiyatı = Satış fiyatı ise bu üründen ne kâr ne zarar ediliyordur.

- * Aksi belirtilmediği sürece kâr-zarar yüzdeleri alış fiyatı üzerinden hesaplanır. Alış fiyatı verilmeyen problemlerde alış fiyatı $100x$ alınırsa ifadelerin yüzdesi kolay alınır.

UYARI

Bir ürünün kârlı ve zararlı satış fiyatı istenirse;

$$\# \text{ Satış Fiyatı} = \text{Alış Fiyatı} \cdot \frac{(100 + \text{Kâr Yüzdesi})}{100}$$

$$\# \text{ Satış Fiyatı} = \text{Alış Fiyatı} \cdot \frac{(100 - \text{Zarar Yüzdesi})}{100}$$

ile bulunur.



- * Alış fiyatı 40 TL olan bir ürün için;

- * %30 kâr ederse

$$\text{Kâr} = 40 \cdot \frac{30}{100} = 12 \text{ TL'dir.}$$

- * %20 kârlı satış fiyatı

$$\begin{aligned} \text{Satış} &= 40 \cdot \frac{(100 + 20)}{100} \\ &= 48 \cdot \frac{120}{100} = 48 \text{ TL'dir.} \end{aligned}$$

"İnsanın

kanadı,

gayretidir."

Mevlana

Çöz

%12 zararla 264 TL'ye satılan bir malın, %15 kârla satış fiyatı kaç TL'dir?

Öğren

Malın alış fiyatı belirtilmediği için;

Alış Fiyatı = $100x$ alınır.

%12 zararla satış fiyatı;

$$\text{Satış} = 100x \cdot \frac{(100-12)}{100} = 88x \text{ 'tir.}$$

$$88x = 264 \Rightarrow x = 3 \text{ 'tür.}$$

%15 kârla satış fiyatı;

$$\text{Satış} = 100x \cdot \frac{(100+15)}{100} = 115x \text{ 'tir}$$

$$\text{Satış} = 115x$$

$$\text{Satış} = 115 \cdot 3 = 345 \text{ TL olur.}$$

Çöz

Bir tüccar elindeki malların tanesini 35 TL'den satarsa 540 TL kâr, 24 TL'den satarsa 120 TL zarar ediyor.

Buna göre, tüccarın elinde kaç tane malı vardır?

Öğren

Tüccarın elinde x tane mal olsun. Tanesi 35 TL'den satınca 540 TL kâr ettiğine göre;

Alış Fiyatı + Kâr = Satış Fiyatı

$$\text{Alış} + 540 = 35 \cdot x \Rightarrow \text{Alış} = 35x - 540 \quad \text{--- (I)}$$

Tanesi 24 TL'den satınca 120 TL zarar ettiğine göre;

Alış Fiyatı - Zarar = Satış Fiyatı

$$\text{Alış} - 120 = 24 \cdot x \Rightarrow \text{Alış} = 24x + 120 \quad \text{--- (II)}$$

$$35x - 540 = 24x + 120 \Rightarrow 11x = 660 \quad x = 60 \text{ olur.}$$

Çöz

Alış fiyatı üzerinden %20 kârla satılan bir ürüne satış fiyatı üzerinden %8 zam yapılıyor.

Ürün bu zamlarla birlikte alış fiyatı üzerinden yüzde kaç kârla satılmış olur?

Öğren

Alış fiyatı $100x$ olsun.

%20 kârla satış fiyatı;

$$\text{Satış} = 100x \cdot \frac{(100+20)}{100} = 120x \text{ olur.}$$

Bu ürüne satış fiyatı üzerinden %8 zam yapıldığında satış fiyatı;

$$\text{Satış} = 120x \cdot \frac{(100+8)}{100} = 129,6x \cdot \frac{108}{100} = 129,6x \text{ olur.}$$

$$100x \text{ 'e alınıp } 129,6x \text{ 'e satılan bir üründen } 129,6x - 100x = 29,6x \text{ \%29,6 kâr edilir.}$$

ÇÖZ

Bir manav kilogramı 300 kuruştan 60 kg elma alıyor. Bu elmaların yarısını kilogramı 350 kuruştan kalanın $\frac{2}{3}$ 'ünü kilogramı 280 kuruştan satıyor.

Bu manav, geri kalan elmanın kilogramını en az kaç kr'dan satarsa bu satıştan zarar etmez?

ÖĞREN

Manav elmaların 1 kg 300 kr'tan aldığına göre ve 60 kg elma aldığına göre, manavın elmaları alış fiyatı

$$A.F = 300 \cdot 60 = 18.000 \text{ kr'tur.}$$

0 hâlde elmaların yarısının ($\frac{60}{2} = 30 \text{ kg'ın}$) kilogramı 350 kr'tan satış fiyatı

$$S.F = 350 \cdot 30 = 10.500 \text{ kr'tur.}$$

Malın geri kalanının ($60 - 30 = 30 \text{ kg'nın}$) $\frac{2}{3}$ 'ünün (yani, $30 \cdot \frac{2}{3} = 20 \text{ kg'nın}$) kilogramı 280 kr'tan satış fiyatı.

$$S.F = 280 \cdot 20 = 5.600 \text{ kr'tur.}$$

Son kalan malın (yani, $60 - 30 - 20 = 10 \text{ kg'ın}$) x kr'tan satış fiyatı

$$S.F = x \cdot 10 = 10x \text{ kr'tur.}$$

Tüm satıştan (yani, 60 kg elmadan) zarar etmemesi için bu satışta en az alış fiyatı kadar gelir elde edeceğine göre;

$$\underbrace{10.500}_{\substack{\text{kilogramı} \\ 350 \text{ kr'tan} \\ \text{satış}}} + \underbrace{5.600}_{\substack{\text{kilogramı} \\ 280 \text{ kr'tan} \\ \text{satış}}} + \underbrace{10x}_{\substack{\text{kilogramı} \\ x \text{ kr'tan} \\ \text{satış}}} = \underbrace{18.000}_{\substack{\text{elmaların} \\ \text{alış fiyatı}}}$$

$$16100 + 10x = 18000$$

$$10x = 1900 \quad x = 190 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda, manav kalan elmaları en az 190 kr'tan satarsa bu satıştan zarar etmez.

1. %30 kârla satılmakta olan bir ürün satış fiyatı üzerinden %30 indirim yapılarak satılırsa, son durumdaki kâr-zarar durumu aşağıdakilerden hangisi olur?

- A) %6 kâr edilir.
- B) Kâr ya da zarar edilemez.
- C) %3 zarar edilir.
- D) %6 zarar edilir.
- E) %9 zarar edilir.

2. Bir dikdörtgenin kısa kenarı %10 arttırılır. Uzun kenarı %10 azaltılırsa, alanındaki değişim için aşağıdakilerden hangisi doğru olur?

- A) %5 azalır.
- B) %1 azalır.
- C) Değişmez.
- D) %1 artar.
- E) %5 artar.

3. Bir ürünün satış fiyatı, maliyeti üzerinden %30 kâr ile belirleniyor. Daha sonra satış fiyatı üzerinden %40 zam yapılarak, ürün 91 TL'ye satılıyor. Buna göre, bu ürünün maliyeti kaç TL'dir?

- A) 60
- B) 50
- C) 45
- D) 30
- E) 21

4. Tanesi 18 TL'den bir miktar kitap alınıyor. Eğer satıcı kitapların fiyatında %20 indirim yapsaydı, 5 kitap daha alınabilecekti. Buna göre, kitaplara ödenen para kaç TL'dir?

- A) 300
- B) 360
- C) 450
- D) 480
- E) 600

Cevap Performansı

1	2	3	4
E	B	B	B
A	C	D	E
B	D	E	A
C	E	A	D
D	A	C	C

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

E, B, B, B

5. %36 zararla satılmakta olan bir ürünün satış fiyatına önce %25 zam yapılıyor. Daha sonra son fiyat üzerinden yeniden %25 zam yapılıyor. Son olarak son satış fiyatı üzerinden %25 indirim yapıldığında, bu ürün-den elde edilen kâr-zarar durumu için aşağıdakilerden hangisi doğru olur?

- A) %25 zarar
- B) %11 zarar
- C) %6 zarar
- D) Ne kâr, ne zarar
- E) %6 kâr

6. Sermayesinin %60'ını bir işte değerlendiren tüccar, bu işten %20 zarar etmiştir. Son durumda elinde kalan tüm parasını başka bir işe yatıran tüccar, ikinci işinde %20 kâr etmiştir.

Buna göre, tüccarın iki işin sonundaki toplam kâr-zarar durumu için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

- A) %7,2 kâr etmiştir.
- B) %5,6 kâr etmiştir.
- C) %4,8 kâr etmiştir.
- D) %3,6 zarar etmiştir.
- E) %2,4 zarar etmiştir.

Soru 6

Cevap Performansı

5	6
A	B
B	C
C	D
D	E
E	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyin, aralarını çizgi ile birleştirin.

Doğru Cevaplar
A, B

7. 120 TL tutarındaki parasının bir kısmını yıllık %40 faiz oranı ile 3 aylığına, kalan kısmını ise yıllık %50 faiz oranıyla 6 aylığına bankaya yatıran bir kişi, bu yatırımlardan toplam 240 TL faiz elde etmiştir. Buna göre, %40 faiz oranıyla bankaya yatırılan para kaç TL'dir?

- A) 800
- B) 600
- C) 480
- D) 400
- E) 360

8. Bir doların 1,5 TL olduğu bir dönemde, dolara yıllık %10 ve TL'ye yıllık %32 faiz veriliyor. 15000 TL tutarındaki parasını dolara çevirdikten sonra 1 yıllığına bankaya yatıran bir kişinin yıl sonunda zarar etmemesi için, 1 dolar en az kaç TL olmalıdır?

- A) 1,6 B) 1,8 C) 1,9
- D) 2 E) 2,1

9. Bir bakkal 600 yumurtayı %25 kârla satmayı düşünmektedir. Fakat yumurtaların bir kısmı taşıma sırasında kırılmıştır. Bu durumda bakkal, düşün-
düğü kârı elde edebilmek için sağlam yumurtaları %40, kırıklarını ise %10 kârla satmak zorunda kalmıştır. Buna göre, taşıma sırasında kaç yumurta kırılmıştır?

- A) 240
- B) 300
- C) 320
- D) 400
- E) 420

Soru Çözümü

Cevap Performansı

7	8	9
D	B	B
E	C	E
A	D	A
B	E	C
C	A	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
D, B, B

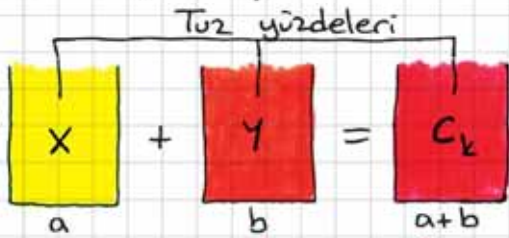
KARIŞIM PROBLEMLERİ

* Karışım problemlerinde her karışım için ayrı kutu çizilerek çözüm yapılır. Aşağıda karşımaıza çıkabilecek problemler için ayrı çözümler göreceğiz.

• Karışım problemlerinde kutunun içine karışım yüzdesi, altına ise karışımın miktarı yazılır.

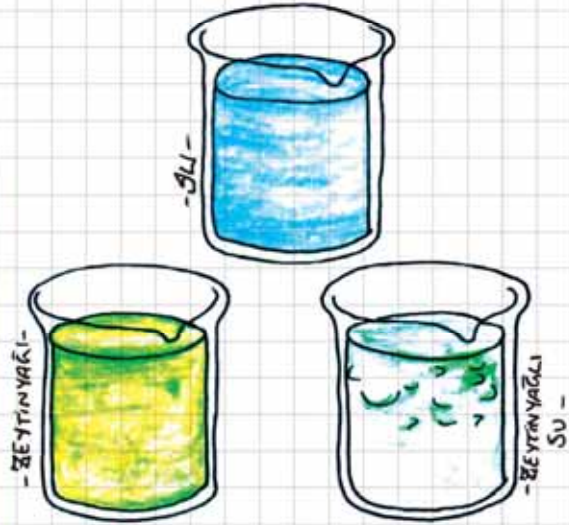
• Kutunun içine yazılan karışım yüzdeleri aynı maddeye ait olmalıdır. Karışımın sonunda elde edilen yüzde aynı maddeye ait olur.

1) %x'i tuz olan a gr tuz-su karışımına, %y'si tuz olan b gr tuz-su karışımı ilave edilirse; elde edilen karışımın tuz yüzdesi kaç olur?



Karışımın miktarı

Bu durumda hesaplama karışımın yüzdesi ile ağırlığının çarpılmasıyla $x \cdot a + y \cdot b = C_k (a+b)$ olur.

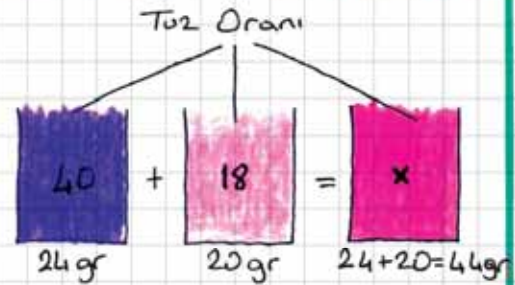


ÇÖZ

Ağırlıkça %40'ı tuz olan 24 gr tuz-su karışımına, ağırlıkça %18'i tuz olan 20 gr tuz-su karışımı ekleniyor.

Buna göre, elde edilen yeni karışımın tuz oranı yüzde kaç olur?

ÖĞREN



Karışımın yüzdeleri ve ağırlıklarını sırasıyla yerlerine yazdıktan sonra,

$$40 \cdot 24 + 18 \cdot 20 = x \cdot 44$$

$$960 + 360 = 44x \quad x = 30 \text{ olur.}$$

O hâlde karışımın tuz yüzdesi %30 bulunur.

**NOT**

Eğer karışımın kutun içine yüzdesi yazılan maddenin aynısından karışıma ilave edilirse, eklenen miktarın yüzdesi %100 olarak alınır.

2) %x'i tuz olan a gr tuz-su karışımına, b gr tuz eklenirse son durumdaki tuz yüzdesi kaç olur?

• Tuzun tuz yüzdesi %100 olduğundan eklenen b gr tuzun yüzdesi 100 alınır. (Karışımın kutun içine tuzun yüzdesi yazılacağından ve karışıma tuz eklendiğinden, eklenen tuzun tuz yüzdesi 100 alınır.)

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline a \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 100 \\ \hline b \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline C_k \\ \hline a+b \end{array}$$

Bu durumda hesaplama;

$$x \cdot a + 100 \cdot b = C_k (a+b) \text{ olur.}$$

**UYARI**

İşlemleri kolaylaştırmak

• için ağırlıkları veya yüzdeleri kendi arasında sadeleştirebiliriz.

**NOT**

Eğer karışımın kutun içine yüzdesi yazılan maddeden farklı bir madde karışıma ilave edilirse veya buharlaştırılırsa eklenen miktarın yüzdesi %0 olarak alınır.

3) %x'i tuz olan a gr tuz-su karışımına, b gr su eklenirse karışımın son durumdaki tuz yüzdesi kaç olur?

• Suyun tuz yüzdesi %0 olduğundan eklenen b gr suyun yüzdesi 0 alınır. (Karışımın kutun içine tuzun yüzdesi yazılacağından ve karışıma su eklendiğinden, eklenen suyun tuz yüzdesi 0 alınır.)

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline a \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline b \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline C_k \\ \hline a+b \end{array}$$

Bu durumda hesaplama;

$$x \cdot a + 0 \cdot b = C_k (a+b) \text{ olur.}$$

4) % x 'i tuz olan a gr tuz-su karışımından, b gr su buharlaştırılırsa son durumdaki tuz yüzdesi kaç olur?

• Su buharlaştığından ağırlıkta azalma olacağından buharlaşma sorularındaki işaret (-) olacaktır.

• Karışımın yüzdesi verilen maddenin dışında başka bir maddede karışıma ilave edilir veya buharlaştırılırsa ilave edilen veya buharlaştırılan maddenin yüzdesi % 0 alınır.

$$\begin{array}{c} x \\ a \end{array} - \begin{array}{c} 0 \\ b \end{array} = \begin{array}{c} C_k \\ a-b \end{array}$$

Bu durumda hesaplama;
 $x \cdot a - 0 \cdot b = C_k (a-b)$ olur.

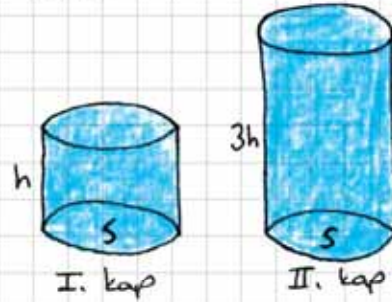


Soruda çıkartmak, yükseltmek, alçaltmak veya indirmek ifadelerinden önce gelen yüzde karışımın son durumdaki yüzdesidir.

DİKKAT ET

ÇÖZ

Taban alanları eşit olan kapların birincisinin yüksekliği h cm, ikincisinin yüksekliği $3h$ cm'dir. Tamamı dolu olan iki kabin birincisinin tuz oranı % 60, ikincisinin tuz oranı % 40'tır.



Bu kaplardaki karışımlar içine bir kaptan karıştırılırsa yeni karışımın tuz oranı yüzde kaç olur?

ÖĞREN

Şekildeki kaplar dik silindir olduğundan içinde bulunan karışımların miktarları kapların hacimlerine eşittir.

$$\text{Silindir} = \frac{\text{Taban}}{\text{Hacmi}} \times \frac{\text{Yükseklik}}{\text{Alanı}}$$

olduğundan,

$$\text{I. Kaptaki bulunan karışımın ağırlığı } s \cdot h = s \cdot h \cdot \text{cm}^3$$

$$\text{II. Kaptaki bulunan karışımın ağırlığı } s \cdot 3h = 3 \cdot s \cdot h \cdot \text{cm}^3 \text{ olur.}$$

Yeni karışımın tuz oranı;

$$60 \cdot sh + 40 \cdot 3 \cdot sh = x \cdot 4 \cdot sh$$

$$60 + 120 = 4x \quad 180 = 4x$$

$$x = \%45 \text{ bulunur.}$$

UYARI

Homojen bir karışımdan
• belli bir miktar alındığında, alınan kısımda kalan kısımda içindeki madde yüzdeleri değişmez.

Örneğin;

Şeker oranı %60 olan 40 gr şekerli suyun $\frac{1}{4}$ 'ü dökülürse;

$$40 \cdot \frac{1}{4} = 10 \text{ gr dökülür.}$$

Son durumda karışımda $40 - 10 = 30$ gr kalır ve kalan 30 gramın şeker oranı değişmez yani, %60 olarak kalır.

**-NOT-**

Sadece maddelerin ağırlıkları verilen sorular;

Toplam miktar istenenin miktarı

$$\frac{100}{\quad} = \frac{x}{\quad} \quad \text{D.D}$$

oranısıyla çözülür.

ÇÖZ

Şeker oranı %60 olan karışımın $\frac{2}{5}$ 'i alınıp, yerine aynı miktarda şeker ekleniyor.

Son durumda elde edilen karışımın su su oranı yüzde kaç olur?

ÖĞREN

Başlangıçta 5 litre şeker-su karışımı olsun. (Alınan miktarın paydası 5 olduğundan)

$$\text{Alınan miktar} = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2 \text{ litredir.}$$

Kalan miktar = $5 - 2 = 3$ litre olur. O hâlde; şeker oranı, %60 olan 3 litre karışıma alınan miktar kadar (yani, 2 litre) şeker eklenirse,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 60 & + & 100 \\ \hline 3 \text{ litre} & & 2 \text{ litre} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline 5 \text{ litre} \\ \hline \end{array}$$

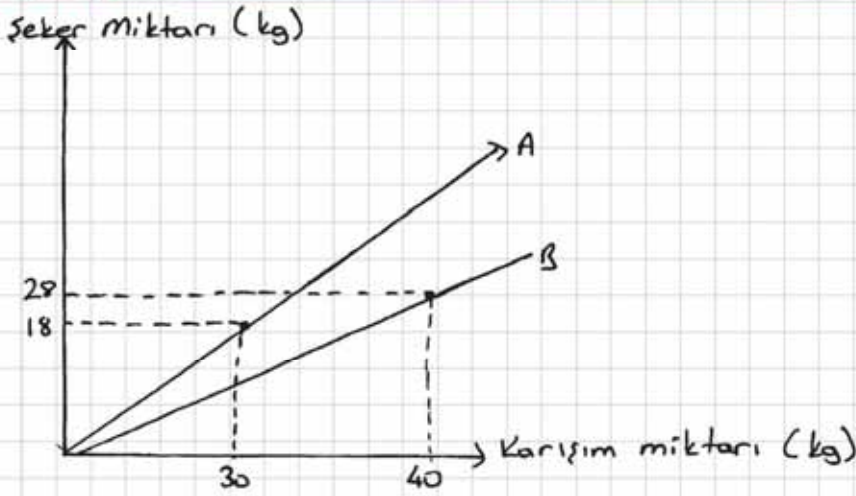
$$60 \cdot 3 + 2 \cdot 100 = 5x$$

$$180 + 200 = 5x \quad 380 = 5x$$

$$x = 76 \text{ elde edilir.}$$

Karışımın son durumdaki şeker oranı %76'dır. Soruda su oranı sorulduğu için $(100 - 76 = 24)$ su oranı, %24 olur.

Çöz



Yukarıdaki grafik A ve B karışımlarındaki şeker miktarlarını göstermektedir.

A karışımından 40 kg, B karışımından 60 kg alınarak oluşturulan yeni karışımın şeker oranı yüzdesi kaç olur?

ÖĞREN

A karışımının 30 kg 'ında 18 kg şeker varsa
100 kg 'ında x kg şeker vardır.

$$\begin{aligned} \text{D.O} \quad 30 \cdot x &= 18 \cdot 100 \\ x &= \frac{18 \cdot 100}{30} = 60 \text{ 'dır.} \end{aligned}$$

B karışımının 40 kg 'ında 28 kg şeker varsa
100 kg 'ında x

$$\begin{aligned} \text{D.O} \quad x \cdot 40 &= 100 \cdot 28 \\ x &= 5 \cdot 14 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

$$60 \cdot 40 + 70 \cdot 60 = (100) \cdot x$$

$$6600 = 100 \cdot x$$

$$x = \% 66 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

16 ayar 15 gr altının ayarını 18 ayara yükseltmek için kaç gr saf altın kullanılmalıdır?

ÖĞREN

18 ayara yükseltmek için x gram saf altın (24 ayar) kullanılsın. O hâlde;

$$\begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 16 \\ \hline 15 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline 24 \\ \hline x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline 18 \\ \hline 15+x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 120 + 12x &= 135 + 9x \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \text{ gr bulunur.} \end{aligned}$$

"İmkansızla ulaşmanın
tek yolu,
onun mümkün olduğuna
inanmaktır."

Lewis Carroll

ÇÖZ



Şekildeki A, B ve C yeterince büyük bir kaptaki karıştırılarak 600 gram %36 oranında tuz içeren yeni bir karışım elde edilmiştir.

Buna göre B+C kaçtır?

ÖĞREN

A kabına baktığımızda

$$4\% \cdot \frac{15}{100} = 60 \text{ gr tuz ve } 340$$

gram su bulunur.

Oluşturacağımız karışımın (60+B) gr tuz ve (340+C) gr su bulunur.

$$6\% \cdot \frac{36}{100} = 216 \text{ gram tuz olur.}$$

$$60 + B = 216$$

$$\Rightarrow B = 156$$

$$6\% \cdot \frac{64}{100} = 384 \text{ gr saf su içerir.}$$

$$340 + C = 384$$

$$C = 44$$

$$B + C = 200 \text{ olur.}$$

1. Su oranı %80 olan 60 gram şekerli su ile şeker oranı %40 olan 40 gram şekerli su birbirine karıştırılıyor. **Oluşan karışımın şeker oranı yüzde kaçtır?**

- A) 24
- B) 28
- C) 36
- D) 48
- E) 64

2. Şeker oranı %30 olan 20 kg şekerli su karışımından x kg, şeker oranı %24 olan 50 kg şeker-su karışımından y kg su buharlaştırılıyor. Son durumdaki çözeltiler karıştırılıp, içine $x+y$ kg şeker eklendiğinde elde edilen son karışımın ağırlıkça yarısı su oluyor. Buna göre, **$x+y$ toplamı kaçtır?**

- A) 12
- B) 15
- C) 14
- D) 18
- E) 20

3. A kabında %20 alkol oranına sahip 8 litrelik bir karışım, B kabında ise %40 alkol oranına sahip 4 litrelik bir karışım vardır. Önce A kabındaki karışımın yarısı B kabına dökülüyor. Daha sonra B kabında oluşan karışımın yarısı A kabına dökülüyor. **A kabındaki yeni karışımın alkol oranı yüzde kaçtır?**

- A) 15
- B) 16
- C) 20
- D) 24
- E) 25

Soru

Cevap Performansı

1	2	3
B	C	E
C	D	A
D	E	B
E	A	C
A	B	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
B, C, E

HAREKET PROBLEMLERİ

* Hareket problemlerinde, sabit hızla hareket eden bir aracın belirli bir sürede aldığı yol miktarları hesaplanır.

Bu hesaplama,

$$\text{Yol} = \text{Hız} \cdot \text{Zaman} \text{ formülü}$$

ile yapılır.

(x) = Alınan yol

(v) = Aracın hızı

(t) = Zaman (süre) olmak üzere,

$$\text{Yol} = \text{Hız} \cdot \text{Zaman}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x = v \cdot t \text{ olur.}$$

Ancak bu formül kullanılırken formülü oluşturan birimlerin birbiri ile uyumlu olması gerekir.

Yol	Hız	Zaman
km	km/saat	saat
m	m/dakika	dakika
m	m/saniye	saniye

UYARI

Eğer formülü oluşturan birimler birbiri ile uyumlu değilse birimler aynı cinsten yazılır.

Örneğin;

$$1 \text{ sn} = \frac{1}{60} \text{ dk} \quad 1 \text{ dk} = \frac{1}{60} \text{ saat}$$

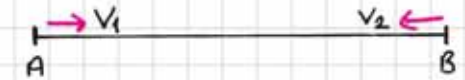
$$1 \text{ sn} = \frac{1}{3600} \text{ saat} \quad 1 \text{ saat} = 60 \text{ dk}$$

$$1 \text{ dk} = 60 \text{ saniye} \quad 1 \text{ saat} = 3600 \text{ sn}$$



NOT

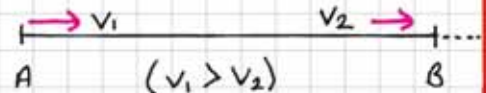
• Aralarında belli bir mesafe bulunan iki araç aynı anda birbirlerine doğru (karşılıklı olarak) hareket eder ve belli bir zaman sonra karşılaşır.



Aralarındaki mesafe = Hızları toplamı • Karşılaşma süresi

$$|AB| = (v_1 + v_2) \cdot t$$

• Aralarında belli bir mesafe bulunan iki araç aynı anda aynı yöne hareket eder ve belli bir zaman sonra biri diğerine yetişirse;



Aralarındaki mesafe = Hızları farkı • Karşılaşma süresi

$$|AB| = (v_1 - v_2) \cdot t$$

ÇÖZ

Bir araç A kentinden B kentine belli bir hızla 8 saatte gidiyor. Eğer hızını saatte 9 km azaltırsa aynı yolu 10 saatte alıyor.

Buna göre, A ve B kentleri arası kaç km'dir?

ÖĞREN

Bu aracın ilk hızına v diyelim. v hızla $|AB|$ arasını 8 saatte aldığına göre;

$\text{Yol} = \text{Hız} \cdot \text{Zaman}$ formülünden $|AB| = v \cdot 8$ elde edilir.

Hızını saatte 9 km azaltırsa hızı $v - 9$ olur. Bu hızla $|AB|$ yolunu 10 saatte aldığına göre; $|AB| = (v - 9) \cdot 10$ olur.

Aracın aldığı yollar birbirine eşit olduğundan,

$$8v = 10(v - 9)$$

$$8v = 10v - 90$$

$$90 = 2v$$

$$45 = v \text{ bulunur.}$$

O hâlde, aracın aldığı yol;

$$|AB| = v \cdot 8 \Rightarrow |AB| = 45 \cdot 8$$

$$|AB| = 360 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

Aralarında 240 km olan A ve B kentlerinden aynı anda birbirlerine doğru hareket eden iki araç 2 saat sonra karşılaşıyorlar. Bu araçlar aynı yöne doğru hareket etselerdi 8 saat sonra hızlı olan araç yavaş olana yetişirdi.

Buna göre, hızlı olan aracın hızı saatte kaç km'dir?

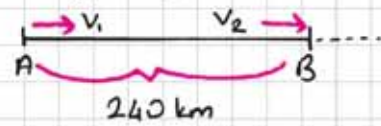
ÖĞREN

Araçların hızları v_1 ve v_2 olsun. Aralarında 240 km mesafe bulunan araçlar aynı anda birbirine doğru harekete başladıktan 2 saat sonra karşılaştıklarına göre;



$$240 = 2 \cdot (v_1 + v_2) \Rightarrow v_1 + v_2 = 120$$

Araçlar aynı anda aynı yöne gittiklerinde 8 saat sonra hızlı olan araç yavaş olan araçta yetiştiğine göre;



$$240 = (v_1 - v_2) \cdot 8 \Rightarrow v_1 - v_2 = 30$$

$$v_1 + v_2 = 120$$

$$+ v_1 - v_2 = 30$$

$$2v_1 = 150 \Rightarrow v_1 = 75 \text{ olur.}$$

$$v_1 + v_2 = 120 \Rightarrow 75 + v_2 = 120$$

$$v_2 = 45 \text{ olur.}$$

**NOT**

Bir araç belli bir yolu değişen hızlarla belli bir sürede tamamlarsa bu aracın yol boyunca değişen hızına ortalama hız denir. Ortalama hız, hızların ortalaması değildir.

Ortalama hız; alınan toplam yolun, bu yolun tamamlanmasında harcanan toplam zamana bölümüyle bulunur.

$$V_{ort} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$$

**UYARI**

Bir hareketli esit iki mesafenin birinde v_1 diğerinde v_2 hızıyla hareket etmişse

$$V_{ort} = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} \text{ ile bulunur.}$$

Dairesel Pist Sorularında;

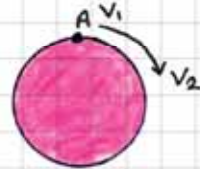
✓ Hızları v_1 ve v_2 olan iki araç bir pistte aynı anda, aynı noktadan, zıt yönde harekete başlar ve belli bir süre sonra karşılaşır;



Dairesel Pistin = Hızları • Karşılaşma
Çevresi Toplamı süresi

$$\text{Çevre} = (v_1 + v_2) \cdot t \text{ ile bulunur.}$$

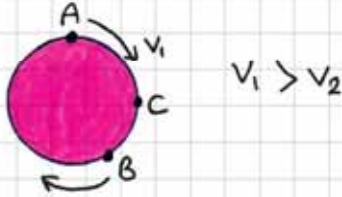
✓ Hızları v_1 ve v_2 olan iki araç dairesel bir pistte aynı anda, aynı noktadan, aynı yönde harekete başlar ve belli bir süre sonra karşılaşır;



Dairesel Pistin = Hızları • Karşılaşma
Çevresi Farkı süresi

$$\text{Çevre} = (v_1 - v_2) \cdot t \text{ ile bulunur.}$$

✓ Aralarında belli bir mesafe bulunan, hızları v_1 ve v_2 olan iki araç dairesel bir pistte aynı anda, aynı yöne doğru harekete başlar ve belli bir süre sonra karşılaşır;



Aralarındaki Mesafe = Hızları Farkı • Karşılaşma Süresi

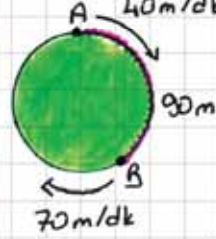
$$|ACB| = (v_1 - v_2) \cdot t \text{ ile bulunur.}$$

Ancak aralarındaki mesafe hızlı olan araçtan yavaş olan araçta doğru alınır.

"İnsanın kendini fethetmesi, zaferlerin en büyüğüdür."

Platon

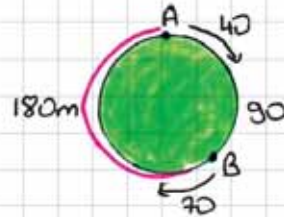
ÇÖZ



Yandaki şekilde 270 m uzunluğundaki dairesel bir pistin A noktasından 40 m/dk, B noktasından 70 m/dk hızla iki araç aynı anda aynı yöne doğru harekete başlıyor. İki araç kaç dakika sonra karşılaşır?

ÖĞREN

Bu iki aracın arasındaki mesafe hızlı olanı yavaş olana doğru alınacağından; aralarındaki mesafe



$$270 - 90 = 180 \text{ m'dir.}$$

Buna göre;

$$180 = (70 - 40) \cdot t$$

$$180 = 30 \cdot t$$

$$t = 6 \text{ bulunur.}$$

Tren Sorularında;

✓ x metre uzunluğundaki bir tren,
y metre uzunluğundaki bir tüneli
veya köprüyü geçiyorsa;

trenin alacağı yol $x+y$ kadardır.

Trenin hızı v olmak üzere;

$$\left(\frac{\text{Trenin Uzunluğu}}{\text{Hızı}} \right) + \left(\frac{\text{Tünelin Uzunluğu}}{\text{Hızı}} \right) = \left(\frac{\text{Trenin Uzunluğu}}{\text{Hızı}} \right) + \left(\frac{\text{Tüneli geçiş süresi}}{\text{Hızı}} \right)$$

$$x+y = v \cdot t \text{ olur.}$$

✓ x metre uzunluğundaki bir tren,
sabit bir noktayı geçiyorsa, tren-
in alacağı yol sabit noktanın
uzunluğu olmadığından sadece
kendi boyu yani x 'tir. Trenin
hızı v olmak üzere;

$$\frac{\text{Trenin Uzunluğu}}{\text{Hızı}} = \frac{\text{Trenin Uzunluğu}}{\text{Hızı}} \cdot \text{Geçiş Süresi}$$

$$x = v \cdot t \text{ 'dir.}$$

UYARI

Tren sorularında verilen;
• yol, hız ve zaman birim-
lerinin birbirleriyle uyumlu ol-
ması gerektiğine dikkat
ediniz. Yani; yol, km cin-
sinden verilmişse zaman
saat olmalıdır.

ÇÖZ

300 metre uzunluğundaki
bir tren 500 metre uzunlu-
ğundaki bir tüneli 40 km/s
hızla kaç saniyede geçer?

ÖĞREN

Verilen hız, km cinsinden
olduğu için bu soruda verilen
birimleri km cinsinden yazalım

Trenin boyu = 300m = 0,3 km'dir.

Tünelin boyu = 500m = 0,5 km'dir.

Buna göre;

$$0,3 + 0,5 = 40 \cdot t \Rightarrow 0,8 = 40 \cdot t$$

$$t = \frac{0,8}{40} \text{ saat olur.}$$

Bulduğumuz zaman saat cinsin-
den ve istenen cevap ise
saniye cinsinden olduğu için
saati saniyeye çevirelim.

1 saat $\rightarrow$ 3600 sn ise

$$\frac{0,8 \text{ saat}}{40} \times 3600 \text{ sn}$$

$$x = 3600 \cdot \frac{0,8}{40} = 72 \text{ sn 'dir.}$$

Akıntı Problemlerinde;

- ✓ Eğer yüzücü akıntıyla aynı yön de yüzüyorsa yüzücünün hızı akıntının hızı ile toplanır.
- ✓ Eğer yüzücü akıntıya ters yönde yüzüyorsa yüzücünün hızından akıntının hızı çıkarılır.

Çöz

Akıntı hızının saatte 2 km olduğu bir denizde yüzücünün hızı saatte 3 km'dir.

Yüzücü toplam 6 saat suda kalabildiğine göre, kıyıda en fazla kaç km uzaklaşabilir?

Öğren

Yüzücü akıntıyla beraber t saat yüzsün. Bu durumda akıntıyla ters yönde $6-t$ saat yüzebilir. Yüzücünün, akıntıyla beraber yüzduğünde aldığı yol;

$$x = (v_y + v_a) \cdot t \quad x = (3+2) \cdot t$$

$$x = 5t \text{ 'dir.}$$

Yüzücü gittiği yol kadar akıntıya karşı yüzeceğinden,

$$x = (v_y - v_a) \cdot (6-t)$$

$$x = (3-2)(6-t) \quad x = (6-t) \text{ 'dir.}$$

Alınan yollar eşit olduğundan,

$$5t = 6-t \quad 6t = 6 \quad t = 1 \text{ 'dir.}$$

O hâlde, yüzücü kıyıda

$$x = 5 \cdot 1 \quad x = 5 \text{ km uzaklaşabilir.}$$

Çöz

Durgun sudaki hızı 60 mill/saat olan bir tekne; bir nehirde akıntı yönünde 8 saatte aldığı yolu, ters yönde 12 saatte alabildiğine göre, nehirdeki akıntının hızı saatte kaç mill'dir?

Öğren

akıntının hızı " a " olsun.

Alınan yollar eşit olacağından alınan yola " x " diyelim. Akıntı ile aynı yönde giderse tekne,

$$(60+a) \cdot 8 = x$$

Akıntı ile ters yönde giderse

$$(60-a) \cdot 12 = x$$

Bundan,

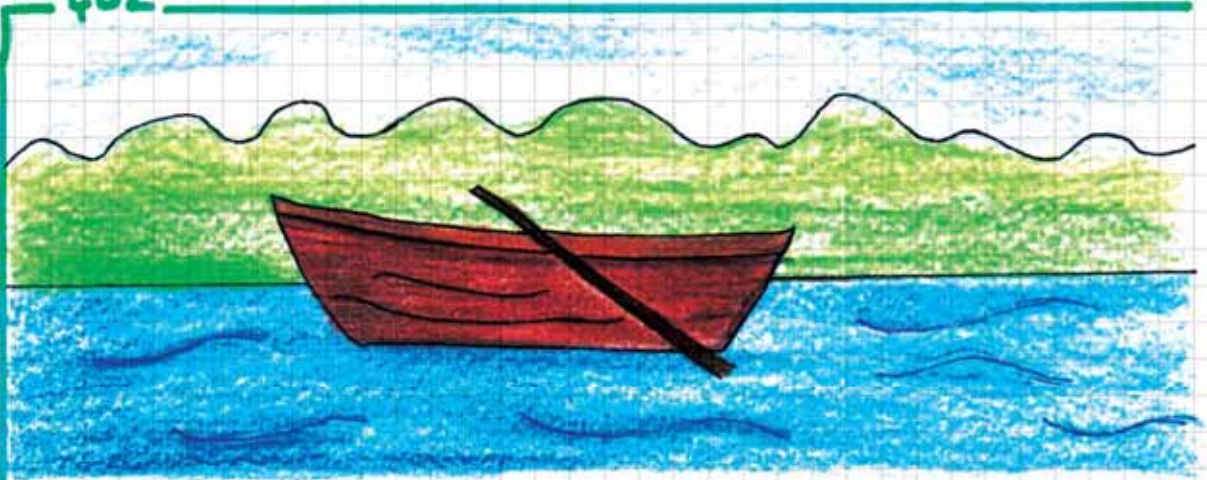
$$(60+a) \cdot 8^2 = (60-a) \cdot 12^2$$

$$120 + 2a = 180 - 3a$$

$$5a = 60$$

$$a = 12 //$$

Çöz



Bir kayak ile akıntı aynı yönde hareket ederlerse kayak gideceği yere 10 dakikada varabilmektedir. Gittiği yerden geri dönerse başladığı noktaya 13 dk varmaktadır. Bu süre içerisinde akıntının yönü değişmediğine göre kayakın hızı akıntının hızının kaç katıdır?

Öğren

Kayakın hızı V_k

Akıntının hızı V_A olsun.

Kayak, akıntı ile aynı yönde giderse,

$$V_k + V_A = \frac{x}{10} \text{ ----- (1)}$$

Kayak, akıntı ile ters yönde giderse,

$$V_k - V_A = \frac{x}{13} \text{ ----- (2)}$$

1 ve 2 'den , x'ler yalnız bırakılırsa,

$$13V_k - 13V_A = 10V_k + 10V_A$$

$$23 \cdot V_A = 3V_k$$

$$\frac{23}{3} \cdot V_A = V_k$$

Yani kayak akıntının hızının $\frac{23}{3}$ katıdır.

ÇÖZ

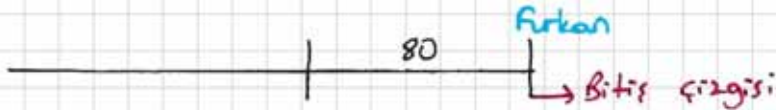
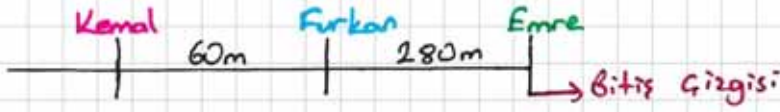


Bu yarış pistinde Kemal, Emre ve Furkan ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- * Emre yarışı bitirdiğinde, Furkan'ın bitiş çizgisine uzaklığı 280 metre, Kemal'in bitiş çizgisine uzaklığı 340 metredir.
- * Furkan yarışı bitirdiğinde Kemal'in yarışı bitirmesine 80 metre kalıyor.

Buna göre, yarış pistinin uzunluğu kaç metredir?

ÖĞREN



Furkan ile Kemal arasındaki mesafe ilk durumda 60 metredir. Furkan yarışı bitirdiğinde bu fark 80 metreye çıkıyor. Yani 280 metrede 20 metre daha fark atıyor.

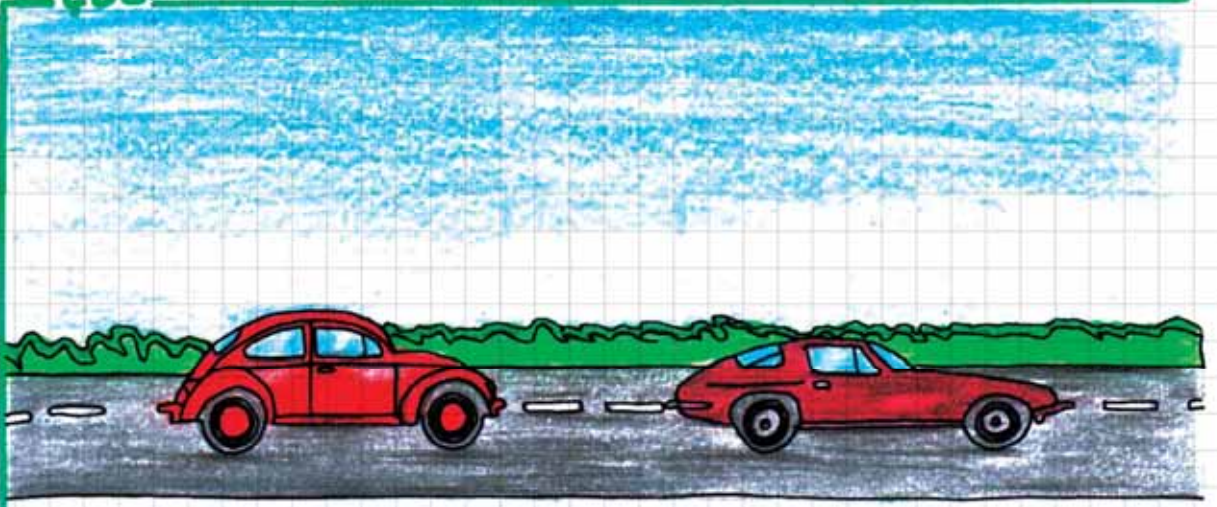
280 metrede	20 metre fark atıyorsa
Pistin tamamında	80 metre fark atıyor.

D.O

$$80 \cdot 280 = 20 \cdot \text{Pistin tamamı}$$

$$\begin{aligned} \text{Pistin uzunluğu} &= 4 \cdot 280 \\ &= 1120 \text{ metredir.} \end{aligned}$$

ÇÖZ.



A kentinden yola çıkan bir otomobil yağmurlu olan yerlerde saatte 70 km, havanın açık olduğu yerlerde saatte ise 105 km hızla sabit hızla giderek B kendine varmıştır.

Eğer bu yolun tamamında yağmur olsaydı B kentine 20 dakika daha geç varabilecekti.

Buna göre, otomobil havanın açık olduğu kısmı kaç dakikada almıştır?

ÖĞREN

A ile B şehirleri arası



Yolun tamamı t saatte alınır:

$$\frac{x}{70} + \frac{y}{105} = t$$

Yağmur tamamında olursa (20 dk daha geç gidecek, $20 \text{ dk} = \frac{1}{3}$)

$$\left(\frac{x}{70} + \frac{y}{70} \right) = t + \frac{1}{3}$$

$$-\frac{x}{70} + \frac{y}{105} = t$$

$$\frac{3y - 2y}{210} = \frac{1}{3}$$

$$3y = 210$$

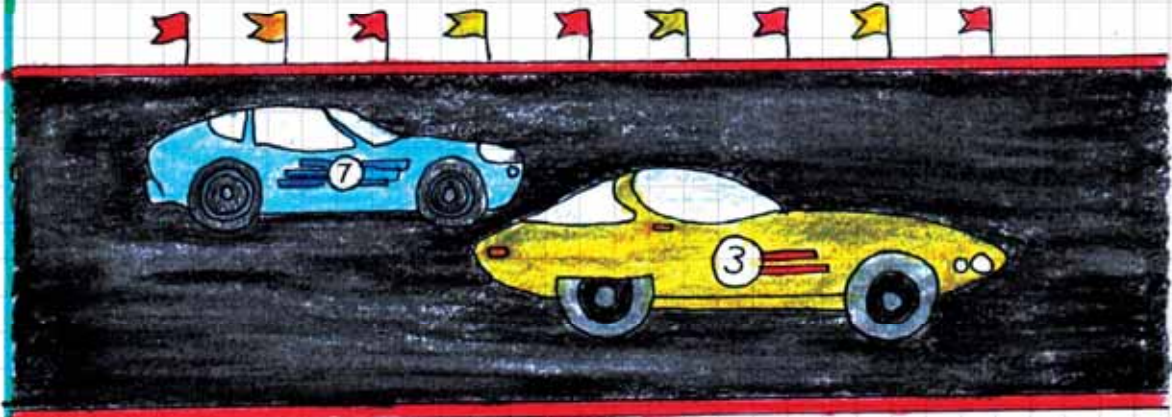
$$y = 70$$

$$70 = 105 \cdot t$$

$$2 = 3t$$

$$t = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 60 = 40 \text{ dk} \right)$$

Göz



Dogrusal bir pistin başlangıç noktasında A marka otomobil ile B marka otomobil yarışa giriyorlar. Saatteki hızları sırasıyla 80 km ve 60 km olan bu otomobiller yarışa aynı anda başlıyorlar. Bir süre sonra A marka otomobilin bir lastiği patladığı için 20 dakika ara verip tekrar kaldığı yerden devam ediyor ve bitiş noktasına B marka otomobilden 40 dakika daha erken varıyor.

Buna göre, B marka otomobil başlangıç noktasından bitiş noktasına kaç saatte varmıştır?

Öğren

Öncelikle 40 dk ve 20 dk 'yı saate çevirelim.

$$40dk = \frac{2}{3} \text{ saat}$$

$$20dk = \frac{1}{3} \text{ saat yapar.}$$

<u>A marka</u>	<u>B marka</u>
$80(t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3})$	$60t$

$$80(t - 1) = 60t$$

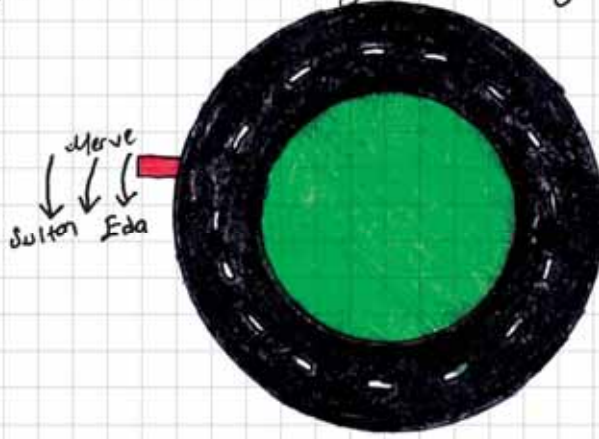
$$8t - 8 = 6t$$

$$2t = 8$$

$$t = 4 //$$

Çöz

Şekildeki dairesel pistte Ede, Merve ve Sultan bulundukları başlangıç noktasından aynı anda yarışa başlıyorlar.



Yarış bitene kadar sabit hızları ile koşan bu yarışmacılar başlangıç noktasına tekrar geldiklerinde bir tur tamamlamış oluyorlar. Ede bir tur tamamladığında Sultan'ın tur bitirmesine pistin uzunluğunun $\frac{1}{3}$ 'ü kalmış, Merve ise pistin yarısına kadar gitmiştir. Ede iki tur tamamladığında bu üç koşucu toplamda 650m yol aldıklarına göre, bir tur kaç metredir?

Öğren

Pistin uzunluğuna $3x$ m dersek. Ede $3x$ m yol aldığında $3x \cdot \frac{1}{3} = x$ m yani Sultan $2x$ m kadar yol almış olur.

Merve'de pistin ortasında ise $1,5x$ m kadar yol almış olur.

$$\text{Ede} \rightarrow 3x \cdot 2 = 6x$$

$$\text{Sultan} \rightarrow 2x \cdot 2 = 4x$$

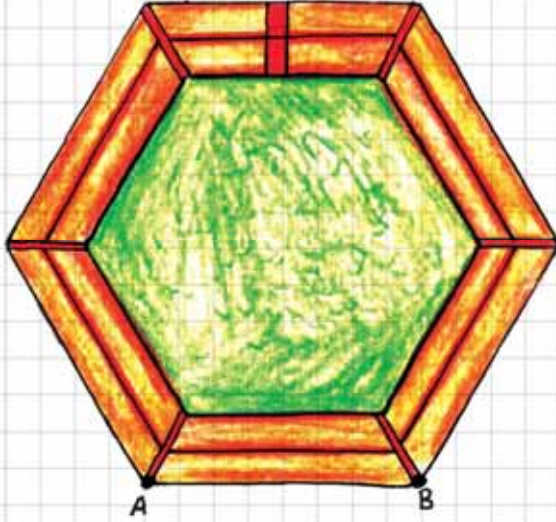
$$\begin{array}{r} \text{Merve} \rightarrow 1,5x \cdot 2 = 3x \\ \hline 13x \end{array}$$

$$13x = 650$$

$$x = 50$$

Pistin uzunluğu $3x$ m ise $3 \cdot 50 = 150$ m olur.

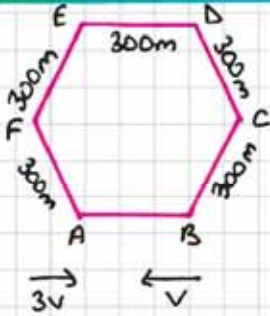
çöz



Bir kenar uzunluğu 300 metre olan Altıgen biçimindeki bir koşu parkurunda A köşesinde bulunan Aslı ile B köşesinde bulunan Akif parkur etrafında sabit hızlarla koşu yapacaklardır. Aslı ile Akif aynı anda birbirlerine doğru AB kenarı üzerinde koşmaya başlıyorlar. Akif A noktasına ilk kez ulaştığında Aslı toplamda 900 metre koşuyor. Buna göre, Aslı ile Akif'in

4. karşılaştıkları noktanın B noktasına uzaklığı en kısa kaç metredir?

ÖĞREN



Aslı'nın 900 metre yol aldığı sürede Akif 300 metre yol almıştır. Bu nedenle Aslı'nın hızı $3v$, Akif'in hızı v olur.

$$(3v + v) \cdot t = 300 \quad 40t = 300 \quad v \cdot t = 75 \text{ metre}$$

Bu karşılaşmadan sonra 3 kez daha karşılaşacaklardır. Bunun için her ikisinin aldığı toplam

yol $3 \cdot 1800 = 5400$ metre.

$$4 \cdot vt = 300$$

$$4v \cdot 18t = 300 \cdot 18$$

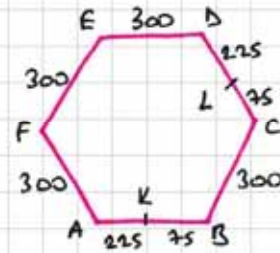
$4v \cdot 18t = 5400$ olduğundan en son karşılaşma

$18t$ sonra olur. Bu süre içinde Akif

$$v \cdot 18t = 18 \cdot 75 = 1350 \text{ metre yol alır.}$$

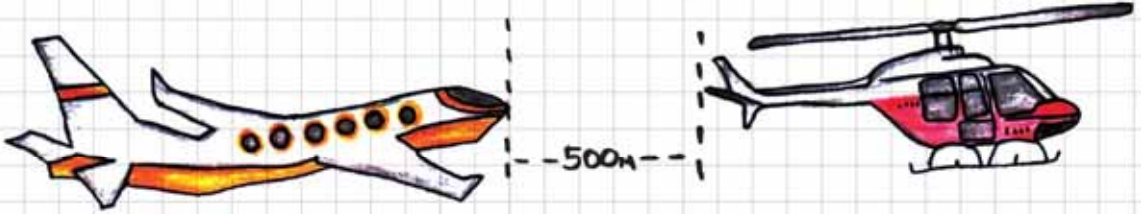
KAFEDL yolu 1350 metre, Aslı ile Akif'in

4. karşılaşmasının B noktasına en kısa uzaklığı BCL yolu, 375 metre olur.



ÇÖZ

Aşağıdaki şekilde aynı yönde hareket eden uçak ve helikopter gösterilmiştir.



Aralarında 500 metre bulunan 70 metre uzunluğundaki bir uçak, saatte V km hız ile 30 metre uzunluğundaki helikopter ise saatte 180 km hız ile hareket etmektedir. Uçak, helikopteri 8 saniye sonra geçtiğine göre V kaçtır?

ÖĞREN

Bir cismin başka bir cismi geçmesi için;

Aralarındaki mesafe + Birinci Cismin Boyu + İkinci Cismin Boyu kadar yol almalı.

Aralarındaki mesafe + Uçağın Boyu + Helikopterin Boyu

$$500 + 70 + 30 = 600 \text{ metre} = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5} \text{ km}$$

$$8 \text{ saniyede geçtiğine göre saate çevirelim } \frac{8}{3600} = \frac{1}{450} \text{ saat}$$

$$x = V \cdot t$$

$$\frac{3}{5} = (V - 180) \cdot \frac{1}{450}$$

$$3 \cdot 450 = (V - 180) \cdot 5$$

$$270 = V - 180$$

$$V = 450 \text{ km olarak bulunur.}$$

1. Saatteki hızları toplamı 30 km olan iki hareketli, bir yolun aynı noktasından, aynı anda zıt yönlerde harekete başlıyorlar.

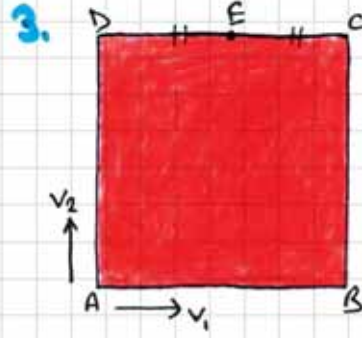
Hareket anından 250 dakika sonra iki araç arasındaki uzaklık kaç km olur?

- A) 250
- B) 270
- C) 325
- D) 360
- E) 375

2. Aralarında 660 km uzaklık bulunan iki kentin birinden 75 km /saat hızla hareket eden bir kamyon ve diğerinden bir otobüs aynı anda birbirlerine doğru hareket ediyorlar.

Kamyon 300 km yol aldığı anda otobüsle karşılaştığına göre, otobüsün saatteki hızı kaç km'dir?

- A) 88
- B) 90
- C) 96
- D) 100
- E) 105



Kare şeklindeki bir pistin A noktasındaki iki hareketli aynı anda, şekilde verilen oklar yönünde hareket ediyorlar. Araçlar bir süre sonra E noktasında karşılaştıklarına göre, $\frac{v_1}{v_2}$

oranı kaçtır?

- A) $\frac{5}{3}$
- B) $\frac{3}{2}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) $\frac{5}{4}$
- E) $\frac{7}{5}$

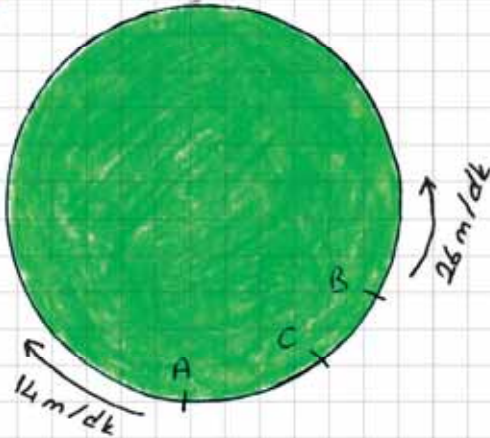
Cevap Performansı

1	2	3
E	A	B
A	B	C
B	C	D
C	D	E
D	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işarette, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
E, A, B

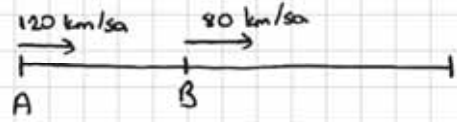
4.



Çevresi 250 metre olan çember-
sel bir pistin A ve B noktaların-
da bulunan iki hareketli, sırasıyla
14 m/dk ve 26 m/dk hızlarla,
aynı anda karşılıklı olarak hare-
kete başlıyorlar. Yay biçimindeki
A-C-B yolunun uzunluğu 60 m
olduğuna göre, bu hareketliler
kaç dk sonra 2. kez karşıla-
şırlar?

- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 14
- E) 15

5.



B şehrinden şekildeki gibi hızı
80 km/saat olan bir araç
harekete başladıktan 4 saat
sonra, A şehrinden saatteki
hızı 120 km/saat olan bir
araç diğeriyle aynı yönde ha-
rekete başlıyor. A şehrinden
hareket eden araç, hareke-
tine başladıktan 10 saat
sonra diğeri araca yetiştiğine
göre, **ABI yolu kaç kilomet-
redir?**

- A) 80
- B) 88
- C) 96
- D) 100
- E) 120

Cevap Performansı

4	5
A	A
B	C
C	E
D	D
E	B

Performansını görmek için
cevaplarını işaretleyerek, arala-
rını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
A, A

GÜNLÜK HAYATTA TEKRAR EDEN DURUM PROBLEMLERİ

* Sabit ve belirli zaman aralıklarıyla tekrar başa dönen olaylara "periyodik olaylar" denir.

Örneğin, günün saatleri, haftanın günleri, yılın ayları, mevsimler gibi çoğaltabiliriz. Ayrıca periyodu belirli kurallara göre kendimizde ayarlayabiliriz.



ÇÖZ

Bir asker 4 günde bir nöbet tutmaktadır.

a) Bu asker ilk nöbetini cumartesi günü tuttuğuna göre, 23. nöbetini hangi gün tutmuş olur?

b) Bu asker 18. nöbetini perşembe günü tuttuğuna göre, 3. nöbetini hangi gün tutmuş olur.

ÖĞREN

a) Bu asker ilk nöbetini cumartesi günü tuttuğuna göre,

$$23 - 1 = 22 \cdot 4 = 88$$

Yani 88 gün sonra hangi gün onu bulmuş olacaktır.

$$\begin{array}{r} 88 \div 7 \\ - 84 \\ \hline 04 \end{array} \rightarrow \text{Kalan}$$

Kalan 4 olduğu için cumartesiden sonra 4 gün sayacağız.

Cumartesi Pazar Pazartesi Salı Çarşamba
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0 1 2 3 4

Yani bu asker 23. nöbetini çarşamba günü tutmuş olur.

b) $18 - 3 = 15$. nöbet

$$15 \cdot 4 = 60$$

$$\begin{array}{r} 60 \div 7 \\ - 56 \\ \hline 04 \end{array}$$

Bize öncesini sorduğu için bu sefer Perşembe gününden dört gün öncesine bakacağız.

Pazar Pazartesi Salı Çarşamba Perşembe 3. nöbetini
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ pazar günü
4 3 2 1 0 tutar.

Çöz

Bir hastanede Eda hemşire 4 günde bir, Yılmaz Doktor 6 günde bir nöbet tutmaktadır.

İkisi birlikte ilk kez salı günü nöbet tuttuklarına göre birlikte 9. nöbeti hangi gün tutarlar?

Öğren

İlk nöbeti tuttuklarına göre, geriye birlikte 8 nöbetleri kalıyor. Ekok $(4, 6) = 12$ olduğundan 12 günde bir birlikte nöbet tutuyorlar.

$$8 \cdot 12 = 96$$

$$\begin{array}{r} 96 \overline{) 7} \\ - 91 \overline{) 13} \\ \hline 05 \end{array} \rightarrow \text{Kalan}$$

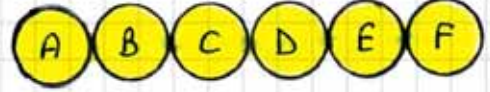
Salı ↓ 0	Çarşamba ↓ 1	Perşembe ↓ 2	Cuma ↓ 3
Cumartesi ↓ 4	Pazar ↓ 5		

Yani dokuzuncu nöbetlerini birlikte pazar günü tutarlar.

Böyle sorularda 5 gün ileri gitmek yerine 2 gün geriye gitmekte aynı sonucu verir.

Pazar ↓ 2	Pazartesi ↓ 1	Salı ↓ 0
-----------------	---------------------	----------------

Çöz



Yukarıda 6 lambadan oluşan bir reklam panosu verilmiştir.

Panodaki lambalar A lambasından başlayarak soldan sağa doğru F lambasına geldiğinde ise sağdan sola doğru devam etmektedir. A-B-C-D-E-F-E-D-C şeklinde yanıp sönmektedir. Buna göre, 3582. yanan lamba hangisi olur?

Öğren

A-B-C-D-E-F-E-D-C
-B / A-B

Bu lambalar 10. sefer yanıp söndüğünde tekrar başa döndüğünden

$$\begin{array}{r} 3582 \overline{) 10} \\ - \overline{) 2} \\ \hline 2 \end{array} \rightarrow \text{Kalan}$$

Yani 3582. yanan lamba 2. sırada olan B lambasıdır.

ÇÖZ

Bir otobüs firmasının iki otobüsünün kaptanları ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- * Birinci otobüsün kaptanı 4 gün çalışıp 1 gün izin kullanıyor.
 - * İkinci otobüsün kaptanı 6 gün çalışıp 1 gün izin kullanıyor.
- Buna göre bu iki otobüsün kaptanı bir yıl içinde maksimum kaç kere aynı gün izin kullanmış olur?

ÖĞREN

1. Otobüsün kaptanı;

5 10 15 20

2. Otobüsün kaptanı;

7 14 21 28

şeklindeki günlerde izin kullanmaktadır.

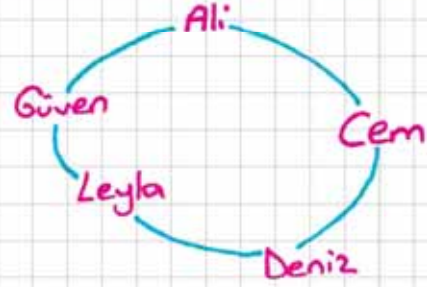
Ekok $(5, 7) = 35$ ise

$$\begin{array}{r} 366 \\ - 350 \\ \hline 16 \end{array}$$

Yani bunlar 35, 70, 105...

günlerde birlikte izin kullanıyorlar. Bölüm 10 olduğu için bir yıl içerisinde 10 defa birlikte izin kullanırlar. Bizden maksimum istediği için ilk gün izinli başlayarak işe başladıklarını sayarsak $10 + 1 = 11$ gün birlikte izin kullanmış olurlar.

ÇÖZ



Dairesel bir oyun parkurunda konumlandırılan Ali, Cem, Deniz, Leyla ve Güven isimli beş arkadaş bir oyun oynayacaktır. Ali elindeki topu Deniz'e vermesiyle oyun başlıyor.

Topu birinci seferde Deniz, ikinci seferde Güven almaktadır ve oyun bu şekilde devam etmiştir. Buna göre topu 115. seferde kim almıştır.

ÖĞREN

1	2	3	4	5
Deniz	Güven	Cem	Leyla	Ali

Yani top 4. taptan sonra başa dönüyor.

$$\begin{array}{r} 115 \\ - 8 \\ \hline 35 \\ 32 \\ \hline (3) \rightarrow \text{Kalan} \end{array}$$

3. seferde top Cem'de olduğundan 115. seferde de Cem'de olur.

1. Bugün günlerden pazar ise 460 gün sonra haftanın hangi günü olur?

- A) Pazartesi
- B) Salı
- C) Çarşamba
- D) Perşembe
- E) Cuma

2. Doğumunun 6666. günü cumartesi olan Ayşe, hangi gün doğmuştur?

- A) Cuma
- B) Cumartesi
- C) Pazar
- D) Salı
- E) Perşembe

3. Çarşamba günü saat 09:00'ü gösteren bir saat, bu andan itibaren 2000 saat sonra hangi günü ve saati gösterir?

- A) Pazartesi 09:00
- B) Salı 09:00
- C) Salı 17:00
- D) Çarşamba 17:00
- E) Çarşamba 19:00

4. 8 saatte bir A ilacını, 10 saatte bir B ilacını alan bir hasta, ilk kez iki ilacı birden saat 08:00'de almıştır. Buna göre, 2. kez iki ilacı aynı anda aldığında saat kaç olacaktır?

- A) 07:00
- B) 07:30
- C) 08:00
- D) 09:00
- E) 10:30

Soru Çözümleri

Cevap Performansı

1	2	3	4
E	A	C	C
A	B	D	B
B	C	E	D
C	D	A	E
D	E	B	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

E, A, C, C

MANTIK

* Doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere önerme denir.

Önermeler $p, q, r, s, \dots$ gibi sembollerle gösterilir.

p : "Aydan 32 yaşındadır."

q : "23 asal sayıdır."

r : " $\sqrt{5}$ sayısı rasyoneldir."

UYARI

Bütün ifadeler önerme belirtmez. Genel olarak soru, emir ve ünlem cümleleri önerme belirtmez.

p : "Balığa gidecek miyiz?"

q : "Bana şeker ver."

r : "Tüh!"

İfadeleri hüküm belirtmediği için önerme değildir.

**NOT**

Önermenin belirttiği hükmün doğru ya da yanlış olmasına o önermenin "doğruluk değeri" denir.

Bir önerme doğruysa doğruluk değeri 1 (veya D), yanlışsa doğruluk değeri 0 (veya Y) olur.

**ÇÖZ**

p : "Ödevime yardım et."

q : "En küçük asal sayı 1'dir."

r : "Üşüyor musun?"

s : "25 ve 16 sayıları aralarında asaldır."

t : "4 ve 9'un katı olan her sayı 6'nın da katıdır."

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi önerme değildir?

ÖĞREN

q, s ve t ifadeleri hüküm bildirdiği için önermedir.

p bir emir cümlesi ve r bir soru cümlesi olduğu için önerme değildir.

Buna göre, 3 tane önerme vardır.

ÖRNEK

p : " $\frac{1}{4}$ tam sayıdır."



önermesi $\frac{1}{4}$ sayısı,

tam sayı olmadığı için yanlıştır.

Yani, doğruluk değeri '0'dır.

q : " π irrasyonel sayıdır."

önermesi: π sayısı rasyonel olarak yazılmadığı için doğrudur. Yani doğruluk değeri '1'dir.

UYARI

Doğruluğuna veya yanlışlığına karar verilemeyen bir ifade önerme değildir. Doğruluk değeri aynı olan önermelere "denk önermeler" denir.

p : "iki negatif sayının farkımı pozitifdir."



q : "Rakamlarının dört tanesi asal sayıdır." Önermelerinin ikisinde doğru önermedir.

Doğruluk değerleri aynı olduğundan denk önermelerdir.

$p \equiv q$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK



NOT

Bir önermenin hükümünü değiştirerek oluşturulan yeni önermeye o önermenin değili veya olumsuz denir. P önermesinin değili P' şeklinde gösterilir.

p : "14 asal

sayıdır" önermesinin değili,

p : "14 asal sayı değildir." şeklinde ifade edilir.



ÖRNEK

UYARI

Bir önermenin değili-
nin değili yine kendisidir. $(P')' \equiv P$

Bileşik Önermeler

İki ya da daha fazla önermenin "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" bağlaçlarıyla bağlanması sonucu oluşan önermelerdir.

ve ($\wedge$) Bağlacı:

$p \wedge q$ bileşik önermesi, önermelerden ikisi de doğruysa doğru, diğer durumlarda yanlış bir önermedir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

— " $\wedge$ " bağlacı doğruluk tablosu —

Veya ($\vee$) Bağlacı :

$p \vee q$ bileşik önermesi, q ve q önermelerinden her ikisinde yanlışken yanlış, diğer durumlarda doğru önermedir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

— " $\vee$ " bağlacı doğruluk tablosu —



NOT

* Tek kuvvet özelliği

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

* Değişme özelliği

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

* Birleşme özelliği

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

* Dağılma özelliği

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee 1 \equiv 1 \quad p \wedge 1 \equiv p$$

$$p \vee 0 \equiv p \quad p \wedge 0 \equiv 0$$

$$p \vee p' \equiv 1 \quad p \wedge p' \equiv 0$$

ÇÖZ

$(p' \vee q) \wedge (p \vee q)$ bileşik önermesi hangisine daima denktir?

ÖĞREN

Dağılma özelliğinden $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ olduğunu biliyoruz. Bunun tersini uygularsak $(p' \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv (p' \wedge p) \vee q$ olur. $p' \wedge p \equiv 0$ olduğundan $(p' \wedge p) \vee q \equiv 0 \vee q$ olur. $0 \vee q \equiv q$ olduğundan daima q 'ya denktir.

Ya da ($\vee$) Bağlacı:

$p \vee q$ bileşik önermesi p ve q önermelerinin doğruluk değerlerinin aynı olduğu durumlarda yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

— " $\vee$ " bağlacının doğruluk tablosu —

**UYARI**

$p \vee q \equiv q \vee p$ (değişme özelliği)

$$p \vee 1 \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \vee 0 \equiv p \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$(p \vee q) \wedge (p' \wedge r) \equiv 1$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini sırasıyla yazınız.

ÖĞREN

" $\wedge$ " bağlacının değerinin doğru olması için önermelerin ikisinin de doğru olması gerekir.

$$(p \vee q) \wedge (p' \wedge r) \equiv 1 \text{ ise}$$

$p \vee q \equiv 1$ ve $p' \wedge r \equiv 1$ olmalıdır.

$$p \vee q \equiv 1 \text{ ise}$$

$$0 \vee q \equiv 1$$

$$p' \wedge r \equiv 1 \text{ ise}$$

$$p' \equiv 1 \text{ ve } r \equiv 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$q \equiv 1 \text{ olmalıdır.}$$

Çünkü " $\vee$ " bağlacının değerinin 1 olması için önermelerin farklı olması gerekir.

$$p' \equiv 1, q \equiv 1 \text{ ve } r \equiv 1 \text{ ise}$$

$$p \equiv 0, q \equiv 1 \text{ ve } r \equiv 1 \text{ bulunur.}$$

"Pek çok insan gerçekleştirmek üzereyken vazgeçer. Ancak karşılaştığın bir engelin, sonuncusu olmadığını asla bilemezsin."

Chuck Norris

Sembolik Mantık ve Kümelerde İşlem İlişkisi:

Kümeler	$\emptyset$	E	$\cup$	$\cap$	$'$	$=$
Mantık	0	1	$\vee$	$\wedge$	'	$\equiv$

Önermeler kümelerde ilişkilendirilirken yukarıdaki semboller bir-biri yerine kullanılabilir.

Bir kaç örnek vermek gerekirse;

$$(A' \cap B') \cup B' \rightarrow (p' \wedge q') \vee q'$$

$$A \cup A' = E \rightarrow p \vee p' \equiv 1$$

$$A \cap A' = \emptyset \rightarrow p \wedge p' \equiv 0$$

$$(A \cap B)' = A' \cap B' \rightarrow (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

ifadelerini yazabiliriz.



UYARI

Kümelerde birleşim ve kesişim işleminin tümleyenleri ile mantıkta " $\vee$ " ve " $\wedge$ " bağlaçlarının değili alınırken ikisi de De Morgan kuralları olarak adlandırılır.

Kümeler ve mantık arasındaki ilişkiyi burada anlıyor olabiliriz.

İse ($\Rightarrow$) Bağlacı:

" $\Rightarrow$ " bağlacıyla bağlanmış bileşik önermenin diğer adı koşullu önermedir.

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesi; p önermesi doğru ve q önermesi yanlış olduğunda yanlış, diğer bütün durumlarda doğrudur.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosu.



UYARI

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ denkliği her zaman doğrudur. İse bağlacını bu şekilde " $\vee$ " bağlacına çevirerek yazmak soruların çözümüne kolaylık sağlayacaktır.

$$p \Rightarrow p \equiv 1$$

$$p \Rightarrow p' \equiv p'$$

$$p' \Rightarrow p \equiv p$$

$$1 \Rightarrow p \equiv p$$

$$p \Rightarrow 1 \equiv 1$$

$$0 \Rightarrow p \equiv 1$$

$$p \Rightarrow 0 \equiv p'$$

Ancak ve Ancak ($\Leftrightarrow$)**Bağlacı:**

" $\Leftrightarrow$ " bağlacıyla bağlanmış bileşik önermenin diğer adı iki yönlü koşullu önermedir. $p \Leftrightarrow q$ bileşik önermesinde p ve q 'nin doğruluk değerleri aynıysa önerme doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

"İki yönlü koşullu önerme" doğruluk tablosu.

UYARI

$$\begin{aligned}
 p \Leftrightarrow p &\equiv 1 \\
 p \Leftrightarrow 1 &\equiv p \\
 p \Leftrightarrow 0 &\equiv p' \\
 p \Leftrightarrow p' &\equiv 0 \\
 p \Leftrightarrow q &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)
 \end{aligned}$$

Çöz

$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p' \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre;

p, q ve r önermelerinin doğruluk değerleri sırasıyla nasıl olmalıdır?

Öğren

Sadece $1 \Rightarrow 0 \equiv 0$

olduğundan,

$p \Leftrightarrow q' \equiv 1$ ve $p' \vee r \equiv 0$ olmalıdır.

$0 \vee 0 \equiv 0$ olması gerektiğinden,

$p' \equiv 0, p \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ olmalıdır.

$p \equiv 1$ alınırsa,

$1 \Leftrightarrow q' \equiv 1$ olması için $q' \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olmalıdır.

Önermelerin değerleri;

$p \equiv 1, q \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olmalıdır.

ÇÖZ

$p' \Rightarrow (p' \wedge r)$ önermesinin en sade halini bulunuz.

ÖĞREN

$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$ olduğuna göre
 $p' \Rightarrow (p' \wedge r) \equiv (p')' \vee (p' \wedge r)$
 $\equiv p \vee (p' \wedge r)$ olur.
 Dağılma özelliğini kullanırsak;
 $p \vee (p' \wedge r) \equiv (p \vee p') \wedge (p \vee r)$
 $\equiv 1 \wedge (p \vee r)$
 $\equiv p \vee r$ bulunur.



NOT

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde p önermesine hipotez, q önermesine hüküm denir.

Koşullu önermenin doğruluk değeri 1 ise, bu önermeye gerektirme denir.

- $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$ 'dir.
- $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ 'dir.
- $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$ 'dir.

Bir koşullu önerme karşıt tersine daima denktir.

ÇÖZ

$(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow q)$
 bileşik önermesinin en sadeleşmiş halini bulunuz.

ÖĞREN

$(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow q)$
 $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$
 $(p' \vee q) \wedge (p \vee q)$
 $(p' \wedge q)$ ve $(p \wedge q)$ şeklinde yazılabilir.

Birleşme özelliğini kullanırsak;
 $(p' \wedge p) \wedge q$ olur.

 $\equiv 0$

$0 \wedge q \equiv 0$ olur.

"Duman çıkıyorsa, tepkime başlamıştır." öner-



mesinin karşıtı "Tepkime başlamışsa duman çıkıyordur."

Tersi, "Duman çıkmıyorsa tepkime başlamamıştır."

Karşıt tersi, "Tepkime başlamamışsa, duman çıkmıyordur." şeklinde ifade edilebilir.

ÖRNEK



NOT

Bir bileşik önerme kendisini oluşturan önermelerin doğruluk değeri ne olursa olsun doğru oluyorsa totoloji'dir. Yanlış oluyorsa çelişki'dir.

$$(p \wedge q') \Rightarrow (p \vee q')$$

önermesinde,

$$\equiv (p \wedge q')' \vee (p \vee q')$$

$$\equiv (p' \vee q) \vee (p \vee q')$$

$\equiv (p' \vee q) \vee (p \vee q')$ için yer değiştirme özelliğini kullanırsak

$$\equiv (p' \vee p) \vee (q \vee q')$$

$$\equiv 1 \vee 1$$

$$\equiv 1 \text{ 'dir.}$$

Verilen önerme p ve q 'nin doğruluk değerlerine bağlı olmayıp daima doğru olduğundan totoloji'dir.

Açık Önermeler

En az bir değişkenden oluşan ve bu değişkenlerin aldığı değerlere göre doğru veya yanlış olan önermelere "açık önermeler" denir.

$[p(x): "x \in \mathbb{N}, x^2 < 19"]$ ifadesi bir açık önermedir. Bu önerme x 'in bazı değerleri için yanlış olabilir.

önermeyi doğru yapan x değerlerinin oluşturduğu kümeye "doğruluk kümesi" denir.

$$P(x): x \in \mathbb{Z}, |x-1| < 2$$

önermesinin doğruluk kümesini bulalım.



$$|x-1| < 2 \text{ ise } -2 < x-1 < 2$$

$$-1 < x < 3 \text{ olur.}$$

Bu aralıktaki tam sayılar 0, 1, 2 olduğundan

$$D = \{0, 1, 2\} \text{ olmalıdır.}$$

ÖRNEK



UYARI

* " $\forall$ " sembolü "her" veya "bütün" şeklinde okunur. $\forall x, p(x)$ gibi bir önermenin doğru olabilmesi için x 'in bütün değerleri için doğru olması gerekir.

En az bir tane x değeri önermeyi sağlamıyorsa önerme yanlıştır.

* " $\exists$ " sembolü "bazı" veya "en az bir" şeklinde okunur. $\exists x p(x)$ önermesinin doğru olabilmesi için en az bir tane x değeri için önerme doğru olmalıdır.

$p: " \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } x^2 - x + 4 > 0 \text{ olur. } "$
önermesinde



$x^2 - x + 4 = 0$ denklemini çözmeye çalışalım.

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = -15 \text{ olur.}$$

$\Delta < 0$ olduğundan kök yoktur.

İşaret tablosu;

	++++++
--	--------

ÖRNEK

şeklinde olur. Tabloya göre, $x^2 - x + 4$ ifadesi daima pozitifdir. x 'in bütün değerleri için önerme doğru olduğundan p önermesi doğrudur.

$q: " \exists x \in \mathbb{Z} \text{ için } x^2 < x " \text{ olur.}$
önermesinde $x^2 < x$ olabilmesi için $0 < x < 1$ olmalıdır. Bu aralıkta tam sayı olmadığı için ifadeyi sağlayacak x değeri yoktur. Bu durumda q önermesi yanlıştır.



UYARI

" $\forall$ " ifadesine evrensel niceleyici, " $\exists$ " ifadesine varlıksal niceleyici denir. $\forall$ niceliğinin negatifi $\exists$ niceleyicisi, $\exists$ niceleyicisinin negatifi $\forall$ niceleyicisidir.

$p: " \exists x \in \mathbb{R} \text{ için } x^2 > x " \text{ önermesinin negatifi;}$



$p': " \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } x^2 \leq x " \text{ olur.}$

ÖRNEK

$q: [(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x^2) \vee (\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0)]$ önermesinin negatifi;

$q': [(\exists x \in \mathbb{R}, 0 > x^2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}, x < 0)]$ şeklinde yazılır.

ÇÖZ

a, b ve c sıfırdan farklı gerçel sayılar olmak üzere

$$p: a+b=0$$

$$q: a+c < 0$$

$$r: c < 0$$

önermeleri veriliyor.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

önermesi yanlış olduğuna göre a, b ve c sayılarının işaretlerini bulunuz.

ÖĞREN

$\Rightarrow$ "ise" önermesi sadece $1 \Rightarrow 0$ durumunda 0'a denktir.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r = 0 \text{ ise}$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r = 0, r = 0 \text{ 'dır.}$$

$$p \wedge q = 1 \text{ ise } p = 1 \text{ ve } q = 1 \text{ 'dir.}$$

Buna göre;

$$a+b=0 \text{ doğru } (p=1)$$

$$a+c < 0 \text{ doğru } (q=1)$$

$$c < 0 \text{ yanlış } (r=0) \text{ demek ki } c > 0$$

$$a+c < 0 \text{ ise } a < 0$$

$$a+b=0 \text{ ise } a < 0 \text{ ise } b > 0$$

$$a, b \text{ ve } c \text{ 'nin işaretleri sırasıyla } -, +, +$$

"Eğer her gün birazcık bir şey üzerine çalışırsan, büyük bir şeyle sonuçlandırırısın."

Kenneth Goldsmith

1. Aşağıdakilerden hangisi bir önerme belirtir?

- A) Dikkat!
- B) Bazı çiçekler 5 yapraklıdır.
- C) Nereye gidiyorsunuz?
- D) Bu konuları tekrar et.
- E) Bir hafta 7 gündür.

$$p: "2^3 = 8"$$

$$q: "4 + (-2) = 1"$$

$$r: "sıfır doğal sayıdır"$$

2. Önermelerinin doğruluk değerleri şıklardan hangisinde doğru olarak verilmiştir?

- A) $p; 1, q; 1, r; 1$
- B) $p; 1, q; 0, r; 1$
- C) $p; 0, q; 0, r; 1$
- D) $p; 1, q; 0, r; 0$
- E) $p; 0, q; 1, r; 0$

3. $(p \vee q) \vee p'$ bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

- A) p
- B) q
- C) p'
- D) 1
- E) 0

$$4. p' \wedge q \equiv 1$$

$$q \wedge r \equiv 0$$

olduğuna göre, p, q ve r 'nin doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $0, 1, 0$
- B) $1, 1, 0$
- C) $0, 1, 1$
- D) $0, 0, 0$
- E) $0, 0, 1$

Soru Çözümü

Cevap Performansı

1	2	3	4
E	B	D	A
A	C	E	B
B	D	A	C
C	E	B	D
D	A	C	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
E, B, D, A

5. $p \Rightarrow q$: "Gizem rapor almış ise hastadır." bileşik önermesine göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) p : "Gizem rapor almış"
 B) q' : "Gizem hasta değildir."
 C) $p \wedge q$: "Gizem rapor almış ve hastadır."
 D) $p \vee q'$: "Gizem rapor almış veya hastadır."
 E) $q \Rightarrow p$: "Gizem hasta ise rapor almıştır."

6. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q' \Leftrightarrow p)$ bileşik önermesine denk önerme aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0
 B) 1
 C) $p \wedge q$
 D) $p' \wedge q$
 E) $p \wedge q'$

7. x bir reel sayıdır.

$$p: " \forall x, x < 4 "$$

$$q: " \exists x, x + 2 = 5 "$$

- olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

- A) p önermesinin doğruluk değeri 0'dır.

- B) q önermesinin doğruluk değeri 1'dir.

$$C) p': " \exists x, x \geq 4 "$$

$$D) p' \wedge q: " \exists x, x \geq 4 \text{ ve } x + 2 = 5 "$$

$$E) p \vee q: " \forall x, x < 4 \text{ veya } x + 2 = 5 "$$

8. $(p' \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

- A) 0
 B) 1
 C) p
 D) q
 E) $p \vee q$

Cevap Performansı

5	6	7	8
D	A	E	C
E	B	A	D
A	C	B	E
B	D	C	A
C	E	D	B

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
 D, A, E, C

KÜMELER

* İyi tanımlanmış nesnelerden oluşan topluluklara küme denir.

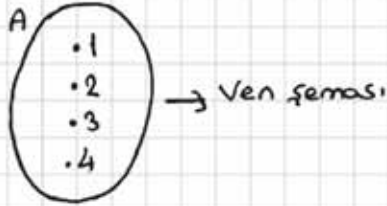
* Örneğin; asal sayılar, tek ve çift sayılar, haftanın günleri, bir iş yerinin çalışanları gibi nitelikler kişiden kişiye farklılık oluşturmaz. O zaman bu ifadelerle küme oluşturulabilir.

* Sıkıcı günler, bazı sayılar, sevimli canlılar gibi ifadeler kişiden kişiye farklılık göstereceği için bu ifadelerle küme oluşturulamaz.

Kümelerin Gösterimi

Kümeyi oluşturan elemanlar farklı şekillerde gösterilebilir.

Önemli olan kümelerin aynı şeyleri ifade etmesidir.



$A = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow$ Liste Yöntemi

$A = \{x : |x| \leq 4, x \in \mathbb{N}^+\} \rightarrow$ Ortak özellik Yöntemi

Yukarıda A kümesi üç farklı şekilde ifade edilmiştir. Fakat tüm kümelerin elemanları 1, 2, 3, 4'tür.

KÜMELER
GEZEGENİNE HOŞ
GELDİNİZ.



NOT

Eleman sayıları eşit olan kümelere denk kümeler denir.

Elemanları aynı olan kümelere ise eşit kümeler denir.

Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir. $\emptyset$ veya $\{\}$ sembolleri ile gösterilir.

$\{\emptyset\}$ ifadesi boş küme değildir.

**NOT**

Bir kümenin eleman sayısı $s(A)$ şeklinde gösterilir. a ifadesi A kümesine ait bir eleman ise $a \in A$, A kümesine ait değilse $a \notin A$ şeklinde gösterilir.

Alt Küme

* Bir kümenin elemanlarının bazıları veya hepsi kullanılarak oluşturulan yeni kümelerin her birisine alt küme denir.

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin

$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ olmak üzere 8 tane alt kümesi vardır.

ÖRNEK

n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı 2^n tane dir.

**UYARI**

Bir kümenin kendisi hariç diğer alt kümelerinin her birisine "öz alt küme" denir. n elemanlı bir kümenin öz alt küme sayısı $2^n - 1$ tane dir.

ÇÖZ

3 elemanlı alt küme sayısı
5 elemanlı alt küme sayısına eşit olan kümenin en çok 2 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

ÖĞREN

3 elemanlı alt küme sayısı
5 elemanlı alt küme sayısına eşitse;

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{5} \text{ yani } n = 5 + 3 = 8$$

Bu kümenin en çok 2 elemanlı alt küme sayısı,

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 1 + 8 + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 37 \text{ olur.}$$



Çöz

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

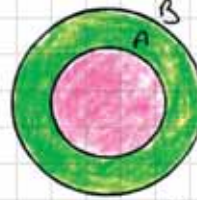
- 1 bulunur?
- 7 bulunmaz?
- 2 bulunur, 6 bulunmaz?

Öğren

- Kümeye 1 olacaksa alt kümeye 1 yazılır ve bir daha kullanılmayacağı için A kümesinden atılır. $K = \{1, \dots\}$ alt kümesini oluşturmak için geriye kalan 6 elemandan hiç biri veya hepsi eklenebilir. Bu da geriye kalan elemanlarla oluşturulabilecek alt kümeler demektir. Öyleyse içinde 1 olan $2^6 = 64$ tane alt küme yazılabilir.
- Alt kümede 7 bulunmayacaksa bu sayı hiç kullanılmayacağı için A kümesinden atılır. Geriye kalan 6 elemanla alt küme oluşturulacağı için $2^6 = 64$ tane 7 olmayan alt küme yazılabilir.
- 2 kullanılacağı için alt kümeye alınır ve A kümesinden silinir. 6 ise hiç kullanılmayacağı için A kümesinden silinir. $K = \{2, \dots\}$ kümesine geriye kalan 5 elemandan istenilen sayıda eklenebilir. Bu durumda $2^5 = 32$ tane alt küme oluşturulabilir.

• $A \subset B \rightarrow A, B$ 'nin alt kümesidir.

$B \supset A \rightarrow B, A$ 'yı kapsar şeklinde okunur.



şeklinde gösterilir.

• $n \geq r$ olmak üzere, n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
 şeklinde bulunur.

ÖRNEK



UYARI

Boş küme bütün kümelerin alt kümesidir.

"Yerinde duran, geriye gidiyor demektir... ileri, daima ileri!"

Mustafa Kemal Atatürk

**NOT**

Pratik olarak;

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1 \text{ olur.}$$

Ayrıca

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{p} \text{ ise}$$

 $r=p$ veya $r+p=n$ olur.

Bütün alt kümelerin sayısı

 2^n olduğuna göre,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

eşitliği daima sağlanır.

$\binom{n}{r}$ ifadesi hesaplanırken r 'ye göre açılım yapmak kolaylık sağlar. Pay kısmında n 'den başlayarak ardışık r tane sayı çarpılır. Payda kısmında ise 1'den başlayarak ardışık r tane sayı çarpılır. Örneğin;

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ şeklinde}$$

açılabilir.

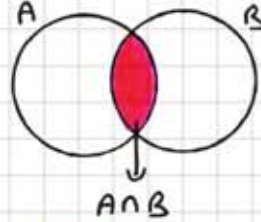
UYARI

Alt küme oluşturulurken eleman sayısı belirtilmemişse 2^n formülü, eleman sayısı $\binom{n}{r}$ formülü ile belirtilmişse kullanılır.

Kümelerde İşlemler

Kesişim Kümesi:

$A \cap B$ ifadesi, A ve B kümelerinde ortak olan elemanların kümesidir.

**NOT**

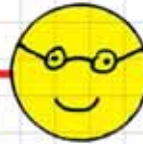
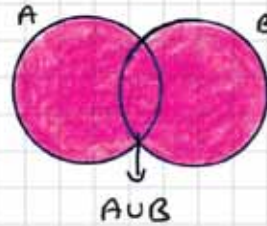
$$A \cap A = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap B = A \text{ ise } A \subset B \text{ 'dir.}$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ ise } A \text{ ve } B \text{ kümeleri ayrık kümelere dir.}$$

Birleşim Kümesi:

$A \cup B$ ifadesi, A veya B kümesinde olan elemanların kümesidir.

**NOT**

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup B \text{ ise } A \text{ 'ya eşittir.}$$

$$A \cup B = A \text{ ise } A \supset B \text{ 'dir.}$$

UYARI

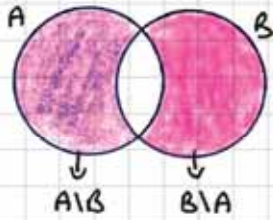
$A \cap B$ kümesi hem A ,
hemde B kümesine ait
olduğundan,
 $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
eşitliği yazılabilir.

**NOT**

Birleşimin kesişim üzeri-
ne veya kesişimin birleşim
üzerine dağılma özelliği vardır.

Fark Kümesi ("\'" veya "-"):

$A \setminus B$ ifadesi A kümesinde olup
 B kümesinde olmayan elemanla-
rın kümesidir.

**UYARI**

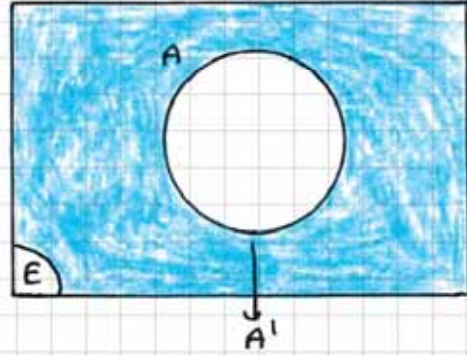
$$s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(A \cap B) + s(B \setminus A)$$

eşitliği daima sağlanır.

Tümleyen Kümesi:

A' ifadesi evrensel kümede
olup A 'da olmayan elemanların
kümesidir.

Diğer bir deyişle A 'nın dışında
kalan elemanların kümesidir.

**UYARI**

$$(A')' = A$$

$$E' = \emptyset$$

$$\emptyset' = E$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = E$$

$$A \subset B \text{ ise } B' \subset A' \text{ 'dir.}$$

$$s(A) + s(A') = s(E) \text{ 'dir.}$$

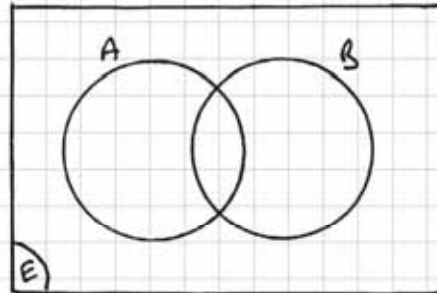
$$\left. \begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \end{aligned} \right\} \text{De Morgan Kuralı}$$

$$A - B = A \cap B' \text{ olur.}$$

Evrensel Küme:

Üzerinde işlem yapılan büt-
tün kümeleri kapsayan küme-
ye evrensel küme denir.

Evrensel kümenin eleman
sayısı sınırlı sayıda dabilir.

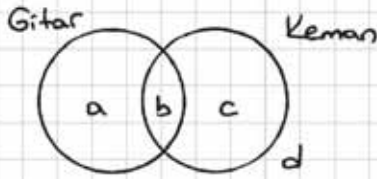


$$E \cup A = E \quad E \cap A = A$$

Küme Problemleri:

Küme problemlerini çözerken kümelerin ayırdığı bölgeleri isimlendirmek ve bu isimleri kullanarak verilenleri denklemlere dönüştürmek çözümü kolaylaştırır.

Örneğin; gitar ve keman çalan kişilerin bulunduğu bir grup olsun.



a → Yalnız gitar çalanlar

b → Gitar ve keman çalanlar

c → Yalnız keman çalanlar

d → Hiçbirini çalmayanlar

a+b → Gitar çalanlar

b+c → Keman çalanlar

a+b+c → Gitar veya keman çalanlar

a+b+c+d → Grubun tamamı şeklinde ifade edilir.

Kartezyen Çarpım

(a,b) şeklinde iki tane nesneden oluşan ifadeye "sıralı ikili" denir. Sıralı iktide sıralama önemlidir.

$a=b$ olmadığı sürece (a,b) ve (b,a) sıralı ikilileri birbirinden farklıdır.

$(a,b) = (c,d)$ ise $a=c$ ve $b=d$ olmalıdır.

Çöz

$(2x-y, y-x) = (3x-4y, x+10)$ olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

Öğren

$2x-y = 3x-4y$ ve $y-x = x+10$ olmalıdır.

$y-x = x+10$ ise $y = 2x+10$ olacağından ilk denklemden y yerine $2x+10$ yazalım.

$$2x-y = 3x-4y$$

$$3y = x$$

$$3(2x+10) = x, 6x+30 = x$$

$$5x = -30, x = -6 \text{ bulunur.}$$

$$3y = x \text{ olduğundan}$$

$$3y = -6, y = -2 \text{ bulunur.}$$

$$x \cdot y = (-6) \cdot (-2)$$

$$= 12 \text{ olmalıdır.}$$

Kümelerde Kartezyen Çarpımı:

A ve B iki küme olsun. İlk elemanı A kümesinden alınarak ikinci elemanı B kümesinden alınarak oluşturulabilecek bütün ikililerin oluşturduğu kümeye "Kartezyen çarpımı kümesi" denir ve $A \times B$ şeklinde gösterilir.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

UYARI

$A=B$ olmadığı sürece
 $A \times B \neq B \times A$ olur.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$
 olsun.

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a),$

$(2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1),$

$(b, 2), (b, 3)\}$ şeklinde olur.

Görüldüğü gibi A ve B kümeleri farklı kümeler olduğundan
 $A \times B \neq B \times A$ olmaktadır.

UYARI

$s(A)=a$ ve $s(B)=b$ olursa;
 $s(A \times B) = a \cdot b$ olur.

A ve B farklı kümeler olsa bile
 $s(A \times B) = s(B \times A)$ olur.



Kartezyen çarpımının, kümelerdeki kesişim, birleşim ve fark işlemleri üzerine dağılma özelliği vardır.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

DİKKAT ET**ÇÖZ**

A ve B kümeleri aynı evrensel kümenin iki alt kümesidir.

$$s(A \cap B) = 3$$

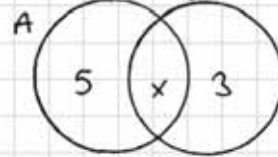
$$s(A - B) = 5 \text{ ve } s(A \times B) = 63$$

olduğuna göre,

$s((A \cup B) \times (A \cap B))$ kaçtır?

ÖĞREN

$A \cap B = B - A$ olduğundan
 kümeyi aşağıdaki gibi çizelim.



$s(A \times B) = 63$ olduğuna göre

$$(x+5)(x+3) = 63$$

$$x^2 + 8x + 15 = 63$$

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\begin{array}{c} x \quad +12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \quad -4 \end{array}$$

$$(x-4)(x+12) = 0$$

$$x=4 \text{ dâbilir.}$$

$$x=4 \text{ için}$$

$$s((A \cup B) \times (A \cap B)) = 12 \cdot 4 \\ = 48 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

$s(A)=4$, $s(B)=6$ ve
 $s(A \times (B \cup C))=36$ olduğuna göre,
 C kümesi en az kaç elemanlıdır?

ÖĞREN

$s(A \times (B \cup C)) = s(A) \cdot s(B \cup C)$ 'dir.

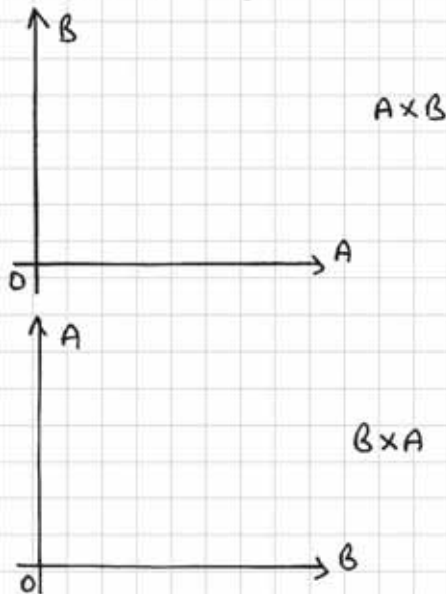
$$4 \cdot s(B \cup C) = 36$$

$s(B \cup C) = 9$ olmalıdır.

B kümesinin 6 tane elemanı vardır. $B \cup C$ 'nin 9 elemanlı olması için C kümesinin B kümesinde olmayan 3 tane elemanı olması yeterlidir.

Kartezyen Düzlem:

$A \times B$ kümesinin elemanları kartezyen düzleme yerleştirilirken A kümesinin elemanları x ekseninde, B kümesinin elemanları y ekseninde alınır. $B \times A$ 'da ise tam tersi yapılır.



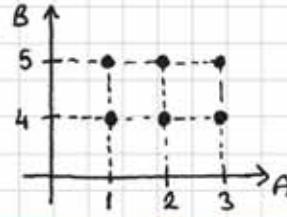
$A = \{1, 2, 3\}$ ve

$B = \{4, 5\}$

kümelerini ele alalım.

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$ olduğundan

grafik;



ÖRNEK

UYARI

A ve B iki küme olsun. $A \times B$ kartezyen çarpımının grafiği çizilirken aşağıdakilere dikkat edilmelidir;

* A ve B kümelerinin ikisi de sınırlı sayıda elemandan oluşuyorsa grafik noktalardan oluşur.

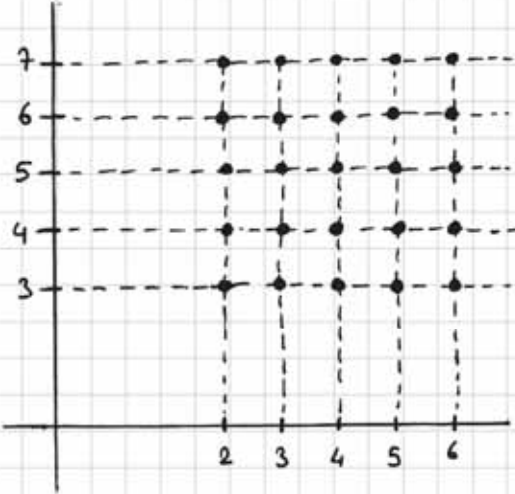
* A ve B kümelerinden birisinin elemanları sınırlı sayıda, diğeri sonsuz sayıdaysa grafik çizgilerden oluşur.

* A ve B kümelerinin ikisi de sonsuz sayıda elemandan oluşuyorsa grafik içi dolu bir dikdörtgenden oluşur.

ÇÖZ

$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğuna göre, $B \times A$ kartezyen çarpımının elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük dairenin alanı kaç πbr^2 'dir?

ÖĞREN



$B \times A$ kümesinin elemanları yukarıdaki gibi olur. Bu elemanları dışarıda bırakmayan çember, oluşan dikdörtgen ya da karenin çevrel çemberidir. Bu durumda dikdörtgenin ya da karenin köşegeni çemberin çapı olur.

Çemberin çapı $2r$ alınırsa

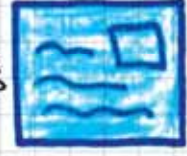
$$(2r)^2 = 4^2 + 4^2$$

$$4r^2 = 32 \rightarrow r^2 = 8 \text{ cm}^2 = 8 br^2$$

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

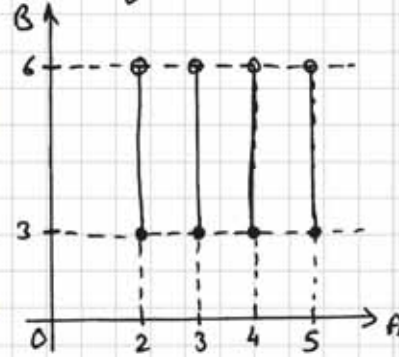
$$B = \{x : 3 \leq x < 6, x \in \mathbb{R}\}$$

olduğuna göre,



$A \times B$ 'nin grafiği çizgilerden oluşmalı. Çünkü A kümesinde sınırlı sayıda eleman vardır. B kümesindeki elemanlar $[3, 6)$ aralığındaki bütün reel sayılardır.

ÖRNEK



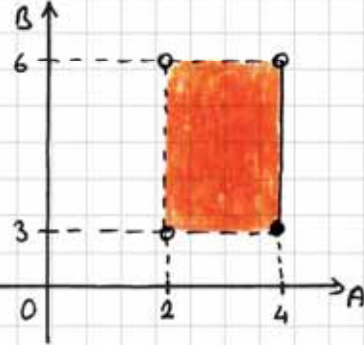
3 sayısı B kümesine dahil olduğundan bu nokta kapalı olur. 6 sayısı B kümesine dahil olmadığından bu nokta açık olur.

$$A = \{x : 2 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{x : 3 \leq x < 6, x \in \mathbb{R}\}$$

kümeleri verilsin.

$A \times B$ çarpımının grafiği aşağıdaki gibi olur;



ÖRNEK

$x=2$ değeri A kümesine dahil olmadığından $x=2$ doğrusu kesikli çizgi şeklinde olur. $x=4$ değeri A kümesine dahil olduğundan $x=4$ doğrusu normal çizgi şeklinde olur. Aynı durumlar B kümesi için $y=3$ ve $y=6$ doğrularına da uygulanır.

UYARI

$$A = \{x : a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{x : c < x < d, x \in \mathbb{R}\}$$

kümeleri verilsin. $A \times B$ 'nin elemanlarının sınırladığı kapalı bölgenin alanı, $(b-a) \cdot (d-c)$ br²'dir.

ÇÖZ

$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = 12$ ve $s(B \cap C) = 3$ olduğuna göre A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ kaçtır?

ÖĞREN

$$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = s[A \times (B \cap C)]$$

$$\text{olup, } s[A \times (B \cap C)] = 12$$

$$s(A) \cdot s(B \cap C) = 12$$

$$s(A) \cdot 3 = 12$$

$$s(A) = 4 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$$A = \{x : \left| \frac{x}{2} + 1 \right| \leq \frac{7}{2}, x \in \mathbb{Z}\}$$

olduğuna göre $s(A \times A)$ kaçtır?

ÖĞREN

$$\left| \frac{x}{2} + 1 \right| \leq \frac{7}{2} \text{ olduğundan}$$

$$-\frac{7}{2} \leq \frac{x}{2} + 1 \leq \frac{7}{2}$$

$$-\frac{9}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$-9 \leq x \leq 5 \text{ ve } x \in \mathbb{Z} \text{ olduğun-}$$

$$\text{dan, } s(A) = 5 - (-9) + 1 = 15$$

$$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A)$$

$$s(A) = 15 \text{ olduğundan,}$$

$$s(A) \cdot s(A) = 15 \cdot 15$$

$$= 225 \text{ olur.}$$

$$s(A \times A) = 225$$

çöz

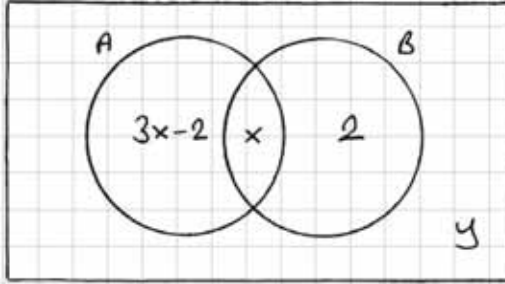
Eleman sayıları 25 olan bir kümenin A ve B alt kümeleri için,

$$s(A \cup B) = 4s(A \cap B)$$

$$s(B \setminus A) = 6$$

olduğuna göre, A kümesinin eleman sayısı en fazla kaçtır?

ÖĞREN



$s(B \setminus A) = 2$ ise eleman sayılarını kümelere yerleştirelim.

$$4x \quad x$$

$$s(A \cup B) = 4s(A \cap B)$$

$$4x + y = 25$$

y = 1 için en az

$$4x + 1 = 25$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

A kümesinin eleman sayısı $4x - 2$ olur.

$x = 6$ için $s(A) = 22$ olur. (En fazla)

"Asla vazgeçme.

Kalbin yorulduğunda, ayaklarınla yürü;
ama yola devam et."

Paulo Coelho

1. $A = \{ \text{Kız öğrenciler} \}$
 $B = \{ \text{Esmer öğrenciler} \}$
 $C = \{ \text{Gözlüklü öğrenciler} \}$
 olduğuna göre, $(C \setminus B) \cap A$ kümes aşağıdakilerden hangisini ifade eder?

- A) $\{ \text{Gözlüksüz esmer olmayan kız öğrenciler} \}$
 B) $\{ \text{Esmer olmayan gözlüklü kız öğrenciler} \}$
 C) $\{ \text{Esmer veya gözlüklü olmayan kız öğrenciler} \}$
 D) $\{ \text{Gözlüksüz esmer kız öğrenciler} \}$
 E) $\{ \text{Gözlüklü kız veya esmer erkek öğrenciler} \}$

2. $A \cap B \neq \emptyset$, $s(A) = 5$, $s(B) = 6$ ve $s(A - B) = 6$ olduğuna göre, B kümesi en az kaç elemanlıdır?

- A) 10
 B) 9
 C) 8
 D) 6
 E) 5

3. A, B, C dergilerinden en az birine abone olanlardan oluşan 59 kişilik bir toplulukta, sadece A, sadece B ve sadece C dergisine abone olanların sayıları birbirine eşittir. Sadece iki dergiye abone olan kişi sayısı, sadece bir dergiye abone olan kişi sayısının 2 katına eşit olduğuna göre, üç dergiye de abone olan kişi sayısı en az kaç olabilir?

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
 E) 5

4. 1 ile 501 arasında, 5 ile bölünüp 6 ile bölünemeyen kaç tane doğal sayı vardır?

- A) 72
 B) 76
 C) 84
 D) 88
 E) 90

Cevap Performansı

1	2	3	4
B	E	E	C
C	A	B	D
D	B	C	E
E	C	D	A
A	D	A	B

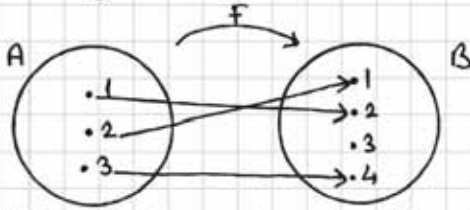
Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
 B, E, E, C

FONKSİYONLAR

* A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun A'daki her elemanı, B kümesinde yalnız bir elemanla eşleştiren bağıntıya fonksiyon denir.

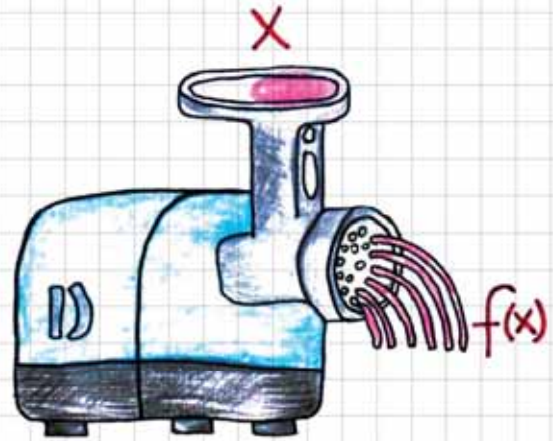
* Bir f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$ şeklinde gösterilebilir.



Yukarıdaki gösterimde A'ya "tanım kümesi", B'ye ise "görüntü kümesi" denir. A kümesindeki elemanların eşleştiği elemanlardan oluşan $f(A) = \{1, 2, 4\}$ kümesine ise "değer kümesi" denir.

UYARI

Bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için tanım kümesinde açıkta eleman kalmamalıdır. Görüntü kümesinde açıkta eleman kalabilir. Fonksiyon olma koşullarından bir diğeri de tanım kümesindeki her elemanın görüntü kümesinde 1 elemanla eşleşmesidir.



NOT

Fonksiyonlar kümelerle ifade edileceği gibi kurallarla da ifade edilebilir. Örneğin;

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f: A \rightarrow B \text{ ve } f(x) = x^2 - 1 \text{ olsun.}$$

Bu durumda;

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 3^2 - 1 = 8$$

$$f(4) = 4^2 - 1 = 15$$

$$f(A) = \{0, 3, 8, 15\} \text{ olur.}$$

$f(A) \subset B$ olmak zorundadır.

Burada " $x^2 - 1$ " ifadesine

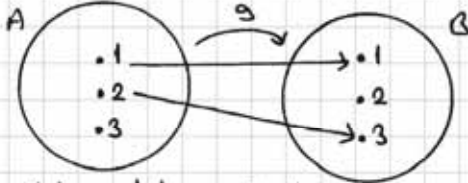
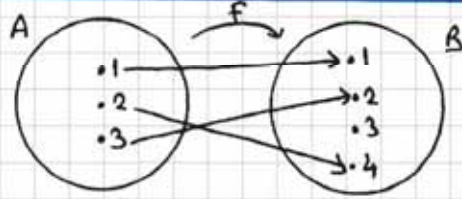
fonksiyonun kuralı denir.

Fonksiyonun tanımladığı

kümenin eleman sayısı

fazlaysa, fonksiyonu kurala

ifade etmek daha mantıklıdır.

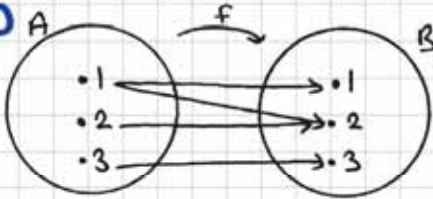


Yukarıdaki eşleştirmelerden f fonksiyondur. Çünkü tanım



kümesinde açıkta eleman kalmamıştır. g ise fonksiyon değildir. Çünkü tanım kümesinde açıkta eleman kalmıştır.

ÖRNEK



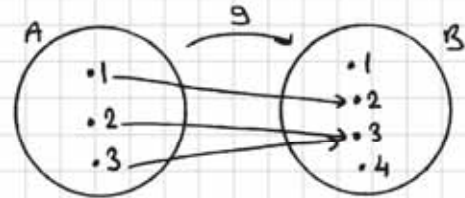
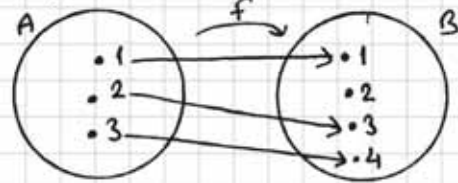
Yukarıdaki ifade de f fonksiyon belirtmez. Çünkü A'daki bir eleman B'deki iki farklı elemanla eşleşmiştir.

Ayrıca $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunda A kümesinin elemanlarına "girdi", $f(A)$ kümesinin elemanlarına ise "çıkış" denilebilir.

Fonksiyon Çeşitleri

Birebir Fonksiyon:

Tanım kümesindeki her eleman, değer kümesinde farklı bir elemanla eşleşiyorsa fonksiyon birebirdir.



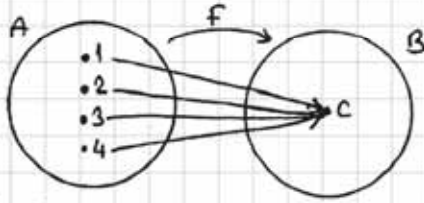
Yukarıda verilen fonksiyonlardan f birebir fonksiyondur. g ise birebir fonksiyon değildir. Çünkü A kümesindeki 2 ve 3 elemanları B kümesinde aynı elemanla eşleşmiştir.

Örten Fonksiyon:

Bir fonksiyonda değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa fonksiyon örten dir. Ayrıca örten olmayan fonksiyona "içine" fonksiyon denir.

Sabit Fonksiyon:

Bir fonksiyonda, tanım kümesindeki her eleman görüntü kümesinde aynı elemanla eşleşiyorsa fonksiyon sabit fonksiyondur.



Yukarıdaki fonksiyon sabit fonksiyondur ve $f(x)=c$ şeklinde gösterilir.

UYARI

Sabit fonksiyonun kuralında x 'li terim bulunmaz. Yani x 'li terimlerin hepsinin katsayısı "0" olmalıdır.

ÇÖZ

$f(x) = (a-3)x^2 + (2b-10)x + a$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre;
 $f(a) + f(b)$ kaçtır?

ÖĞREN

Sabit fonksiyon olabilmesi için x 'li terimlerin katsayıları sıfır olmalıdır.

$$a-3=0 \quad \text{ve} \quad 2b-10=0$$

$$a=3 \quad \quad \quad b=5$$

Bu değerler yerine yazılırsa $f(x)=15$ olur.

x yerine ne yazılırsa yazılsın fonksiyon aynı değeri alacağından $f(a) + f(b) = 15 + 15 = 30$ bulunur.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ fonksiyonu sabit}$$

fonksiyon ise; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ olmalıdır.

Birim Fonksiyon:

Tanım kümesindeki her eleman, değer kümesinde de kendisi ile eşleşiyorsa fonksiyon birim fonksiyondur.

Birim fonksiyonun kuralı $f(x)=x$ şeklindedir.

UYARI

Birim fonksiyonda x 'li terimin katsayısı 1'dir. Bunun dışındaki bütün katsayılar sıfırdır.

ÇÖZ

$f(x) = (a-2)x^3 + (b-3)x^2 + (c-1)x + d-5$ fonksiyonu birim fonksiyon ise a, b, c, d çarpımı kaçtır?

ÖĞREN

f fonksiyonunun birim fonksiyon olması için;

$$a-2=0 \quad \quad \quad b-3=0$$

$$a=2 \quad \quad \quad b=3$$

$$c-1=1 \quad \quad \quad d-5=0$$

$$c=2 \quad \quad \quad d=5$$

$$a, b, c, d = 2, 3, 2, 5 = 60$$

Doğrusal Fonksiyon:

1. dereceden fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir.

$a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklinde gösterilir.

Çöz

f bir doğrusal fonksiyon olmak üzere;

$f(1) = -2$ ve $f(3) = 4$ olduğuna göre, $f(7)$ değeri kaçtır?

Öğren

f doğrusal fonksiyon ise $f(x) = ax + b$ şeklinde ele alalım

$$f(1) = a \cdot 1 + b = -2$$

$$a + b = -2 \text{ olur.}$$

$$f(3) = a \cdot 3 + b = 4$$

$$3a + b = 4 \text{ olur.}$$

Denklemleri ortak çözersek;

$$3a + b = 4$$

$$\begin{array}{r} + \\ -/a + b = -2 \\ \hline 2a = 6 \end{array}$$

$$a = 3 \text{ ve } 3 + b = -2$$

$$b = -5 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda fonksiyonun kuralı $f(x) = 3x - 5$ olur.

$f(7)$ değeri

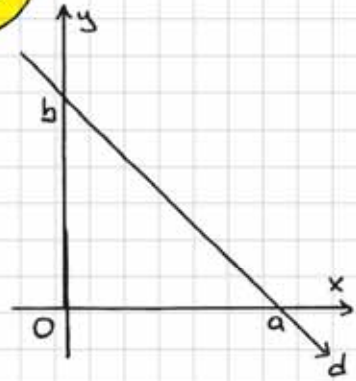
$$f(7) = 3 \cdot 7 - 5$$

$$= 21 - 5$$

$$= 16 \text{ bulunur.}$$



NOT



Bir doğrunun eksenleri kestiği noktalar biliniyorsa

$$d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ şeklinde}$$

yazılabilir. Bu ifade de y değeri yalnız bırakılarak fonksiyon $y = f(x)$ şekline dönüştürülür.

Tek ve Çift Fonksiyonları:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın.

$f(-x) = f(x)$ ise fonksiyon çift fonksiyon, $f(-x) = -f(x)$ ise fonksiyon tek fonksiyondur.

UYARI

Bir fonksiyon, tek fonksiyon veya çift fonksiyon olmayabilir.

ÇÖZ

f fonksiyonu çift fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 2 \cdot f(-x) + 11$$

olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

ÖĞREN

f fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(-x) = f(x)$ olmalıdır.

Bu durumda;

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 2f(x) + 11$$

$$3f(x) = x^4 - 3x^2 + 11 \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$x = 2$ için,

$$3f(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 11$$

$$3f(2) = 16 - 12 + 11$$

$$3f(2) = 15$$

$$f(2) = 5 \text{ bulunur.}$$

UYARI

Tek fonksiyonların grafikleri orijine göre, çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktr.

Ayrıca polinom fonksiyonlarında bütün kuvvetler tek ise fonksiyon tek fonksiyondur, bütün kuvvetler çift ise fonksiyon çift fonksiyondur.

Fonksiyonlarda İşlemler

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı olsun. f ve g fonksiyonlarında işlem yapabilmek için $A \cap B$ kümesi kullanılır. Fonksiyonlar üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri;

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

şeklinde yapılır.

ÇÖZ

f ve g fonksiyonları gerçel sayılar kümesinde tanımlı iki fonksiyondur.

$$(f+2g)(x) = x^2 + 4x + 4$$

$(f-g)(x-1) = x^2 - 4x + 4$ olduğuna göre, $f(2) \cdot g(2)$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÖĞREN

$$f(x) + 2g(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$f(x-1) - g(x-1) = x^2 - 4x + 4$$

$x = 2$ için;

$$f(2) + 2g(2) = 4 + 8 + 4 = 16$$

$x = 3$ için;

$$f(2) - g(2) = 9 - 12 + 4 = 1$$

denklemleri ortak çözersek;

$$f(2) \cdot g(2) = 6 \cdot 5 = 30 \text{ olur.}$$

Bileşke Fonksiyon:

$f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ şeklinde tanımlı iki fonksiyon olsun.

$h: A \rightarrow C$ fonksiyonu $h(x) = (g \circ f)(x)$ şeklinde gösterilir. Önce A kümesinden B kümesine, daha sonra B kümesinden C kümesine eşleştirme yapılacağı için işlem yapmaya sağdaki fonksiyondan başlanır.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin anlamı, sağdaki fonksiyonun kuralı, soldaki fonksiyonda x yerine yazılır demektir.

Gerçek sayılar kümesinde f ve g

$f(x) = x^2 - 1$ ve $g(x) = 3x + 1$ olsun.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

$$= f(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)^2 - 1$$

$$= 9x^2 + 6x + 1 - 1$$

$$= 9x^2 + 6x \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$= g(x^2 - 1)$$

$$= 3(x^2 - 1) + 1$$

$$= 3x^2 - 3 + 1$$

$$= 3x^2 - 2$$

görüldüğü gibi bazı durumlarda $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ olur.

ÇÖZ

$\mathbb{R} - \{-1\}$ kümesinde f ve g fonksiyonları için

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = \frac{x}{x+1} \text{ olduğuna}$$

göre $(g \circ f)(x)$ fonksiyonunun eşitini bulunuz.

ÖĞREN

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x+2}{x+1}}$$

$$= \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{x+2} \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$f(x) = x^2 - ax + 3$ ve $g(x) = 5x - 1$ fonksiyonları veriliyor.

$(f \circ g)(1) = 11$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÖĞREN

$(f \circ g)(1) = f[g(1)]$ olduğuna göre önce $g(1)$ değerini bulalım.

$$g(1) = 5 \cdot 1 - 1 = 4 \text{ olur.}$$

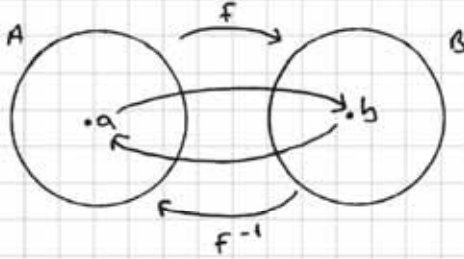
$$f[g(1)] = f(4) = 11$$

$$4^2 - a \cdot 4 + 3 = 11$$

$$4a = 8 \rightarrow a = 2$$

Ters Fonksiyon:

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}: B \rightarrow A$ şeklinde gösterilir.



Yukarıda da görüldüğü üzere $f(a)=b$ ise $f^{-1}(b)=a$ olmalıdır.

UYARI

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için fonksiyonun birebir ve örten olması gerekir. Bir fonksiyonun tersi bulunurken genel olarak fonksiyondaki x değişkeni yalnız bırakılır. Daha sonra x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerine x yazılır.

- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
- $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$ (birim fonksiyon)
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$
- $y = f(x)$ ise $f^{-1}(y) = x$ 'tir.
- $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ olur.
- $f(x) = g(x)$ ise $(f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$ olur.

ÇÖZ

Gerçek sayılar kümesinde $f(x) = \frac{x^3-1}{4}$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÖĞREN

Fonksiyonun tersini bulabilmek için x 'i yalnız bırakalım.

$$y = \frac{x^3-1}{4} \text{ şeklinde yazılırsa}$$

$$4y = x^3 - 1$$

$$4y + 1 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{4y+1} \text{ olur.}$$

x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerine x yazılırsa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x+1} \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-1} \text{ olduğuna göre}$$

$f^{-1}(5)$ değeri kaçtır?

ÖĞREN

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

Kuralına göre;

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-1} \text{ ise}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-4} \text{ olur.}$$

$$f^{-1}(5) = \frac{5-3}{5-4} = 2$$

Çöz

$(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = 2x+1$ ve $f(x) = 4x$ olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Öğren

$(f^{-1} \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$ olduğunu biliyoruz.

$$(g^{-1} \circ f)(x) = 2x+1 \text{ ise}$$

$$g^{-1}(4x) = 2x+1$$

$$g(2x+1) = 4x \text{ olur.}$$

x yerine $\frac{x-1}{2}$ yazılırsa

$$g(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$g(x) = 2x-2 \text{ bulunur.}$$

Çöz

$f(x) = 4x-8$ ve $(f \circ g)(x) = 16x^2$ olduğuna göre, $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Öğren

$$f(x) = 4x-8, f^{-1}(x) = \frac{x+8}{4}$$

$$(f \circ g)(x) = 16x^2, (f^{-1} \circ f \circ g)(x) = f^{-1} \circ (16x^2)$$

$$g(x) = \left(\frac{x+8}{4} \right) \circ (16x^2)$$

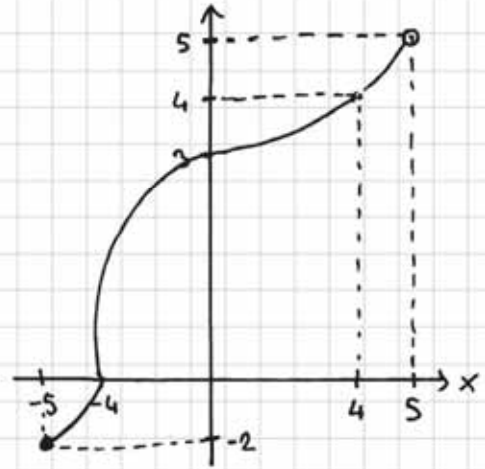
$$= \frac{16x^2+8}{4}$$

$$= 4x^2+2 \text{ bulunur.}$$

Fonksiyon Grafikleri

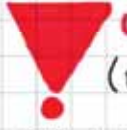
$f: A \rightarrow B$ fonksiyonunda $x_0 \in A$ ise $f(x_0) \in B$ olur.

Bu durumda, $K(x_0, f(x_0))$ noktası fonksiyonun grafiği üzerindedir. Fonksiyonu oluşturan bütün ikililerin birleştirilmesiyle grafik çizilmiş olur.



Örneğin yukarıdaki grafikte verilen f fonksiyonu $[-5, 5]$ aralığında tanımlıdır. Bu grafiğe göre;

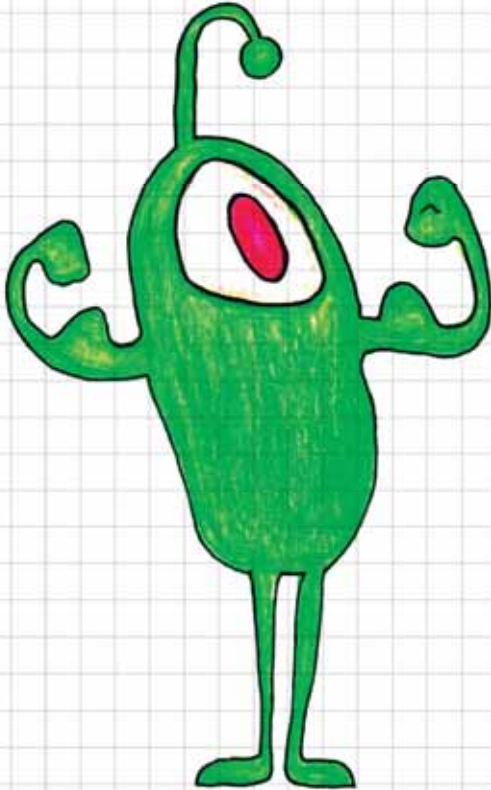
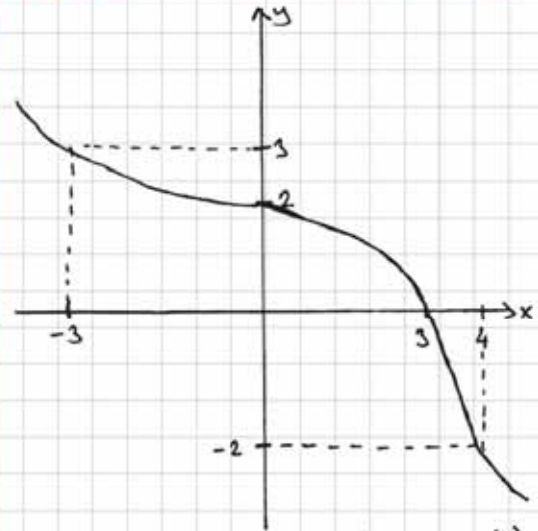
$$f(4) = 4, f(0) = 3, f(-4) = 0 \text{ ve } f(-5) = -2 \text{ olur.}$$

**UYARI**

$(0, f(0))$ noktası fonksiyonun y eksenini kestiği noktadır. Fonksiyonun x eksenini kestiği noktada $f(x)=0$ olur.

Bir fonksiyonun tersinin grafiği, fonksiyonun grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetridir. Yani

$P(x_0, y_0)$ noktası fonksiyon üzerindeyse $P'(y_0, x_0)$ noktası fonksiyonun tersinin grafiği üzerindedir.

**ÇÖZ**

Yukarıda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonuna göre,

$\frac{f^{-1}(-2) + f(0)}{f(3) - f^{-1}(3)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÖĞREN

Grafiğe göre;

$$f(4) = -2 \rightarrow f^{-1}(-2) = 4$$

$$f(0) = 2 \rightarrow f^{-1}(2) = 0$$

$$f(3) = 0 \rightarrow f^{-1}(0) = 3$$

$$f(-3) = 3 \rightarrow f^{-1}(3) = -3$$

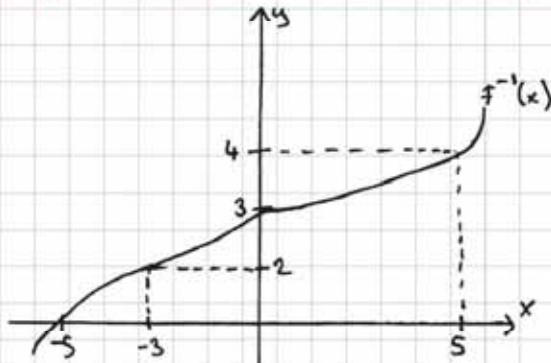
olduğuna göre;

$$\frac{f^{-1}(-2) + f(0)}{f(3) - f^{-1}(3)}$$

$$= \frac{4 + 2}{0 - (-3)}$$

$$= \frac{6}{3} = 2 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ



Yukarıda $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;
 $\frac{f(4) - f(0)}{f^{-1}(5) + f(2)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÖĞREN

Grafığe göre;

$$f^{-1}(5) = 4 \rightarrow f(4) = 5$$

$$f^{-1}(0) = 3 \rightarrow f(3) = 0$$

$$f^{-1}(-3) = 2 \rightarrow f(2) = -3$$

$$f^{-1}(-5) = 0 \rightarrow f(0) = -5$$

olduğuna göre;

$$\frac{f(4) - f(0)}{f^{-1}(5) + f(2)} = \frac{5 - (-5)}{4 + (-3)} = \frac{10}{1} = 10 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x < 0 \\ x+3 & x \geq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f bire birdir.

II. f örtendir.

III. f 'nin görüntü kümesi $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 'dir.

İfadelerinden hangisi doğrudur?

ÖĞREN

$$f(0) = 3, f(1) = 4, f(2) = 5 \dots \\ f(-1) = -3, f(-2) = -4, f(-3) = -5 \dots$$

x 'in her farklı değeri için $f(x)$ farklı bir değer aldığından f bire birdir.

Görüntü kümesinden,

$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olmadığından, f örten değildir.

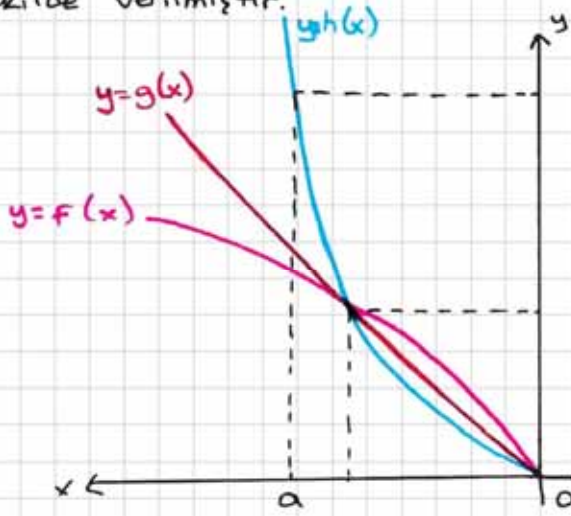
Görüntü kümesi,

$\mathbb{Z} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ olacaktır.

Yalnızca II doğrudur.

FÖZ

Dik koordinat düzleminde f, g ve h fonksiyonlarının grafikleri şekilde verilmiştir.



Buna göre, $0 < a < -3$ koşulunu sağlayan bir a gerçel sayısı için

- I. $f(a) < g(a)$ olduğunda $g(a) < h(a)$ olur.
- II. $g(a) < h(a)$ olduğunda $h(a) < f(a)$ olur.
- III. $h(a) < f(a)$ olduğunda $f(a) < g(a)$ olur.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

ÖĞREN

Kesıştikleri yer b noktası olsun.

Grafığe göre, $(b, 0)$ aralığında $h(a) < g(a) < f(a)$

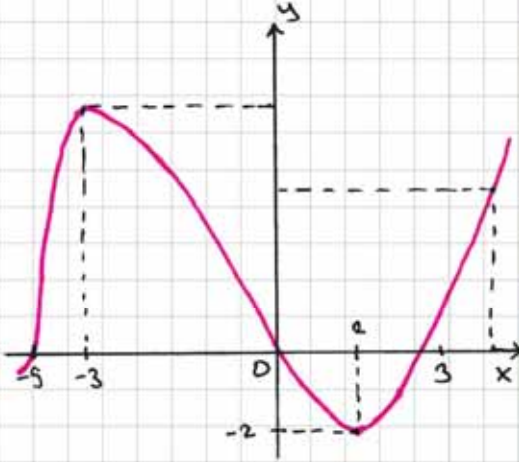
$(a, -3)$ aralığında $f(a) < g(a) < h(a)$

Buna göre sadece birinci öncül doğrudur.

"Özgürsem,
sürekli koştuğumdandır."

Jimi Hendrix

ÇÖZ



$g(x-2) = f(x-1) + 4$ olduğuna göre,
 $g(-4) + g(1)$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$x = -2 \text{ için, } g(-4) = f(-3) + 4$$

$$f(-3) = 6 \text{ ise}$$

$$g(-4) = 6 + 4 = 10$$

$$x = 3 \text{ için, } g(1) = f(2) + 4$$

$$f(2) = -2 \text{ ise}$$

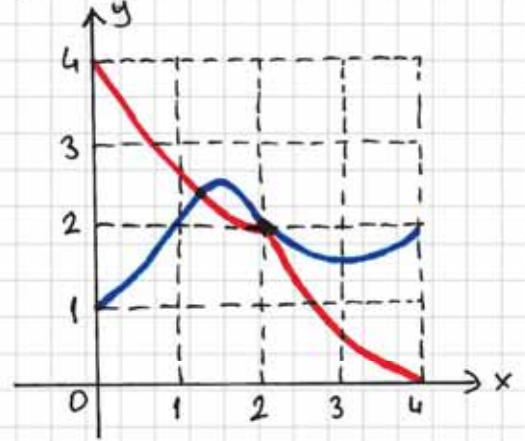
$$g(1) = -2 + 4 = 2$$

$$g(-4) + g(1) = 10 + 2$$

$$= 12 \text{ olarak bulunur.}$$

ÇÖZ

Dik koordinat düzleminde $[0, 4]$ aralığında tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri şekilde verilmiştir.



Bir $a \in (0, 1)$ sayısı için

$$b = (f \circ g)(a)$$

$$c = (g \circ f)(a)$$

olarak belirtiliyor. Buna göre, a, b ve c sayılarının doğru sıralanışını bulunuz.

ÖĞREN

$b = (f \circ g)(a)$ için bakalım " a " değeri 0 ile 1 arasında bir değer olduğu için $2 < g(a) < 3$ arasında bir değer alır.

$b = f(g(a))$ ise 1 ile 2 arasında bir değer alır.

$$1 < b < 2$$

$c = (g \circ f)(a)$ a değeri 0 ile 1 olduğundan

$1 < f(a) < 2$ arasında bir değer alır.

$2 < c = g(f(a)) < 3$ aralığında bir değer alır.

$$c > b > a \text{ olur.}$$

1. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı,

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$h(x) = \sqrt{x+3}$$

fonksiyonları için $\left(\frac{f-g}{h}\right)(1)$ de-
geri kaçtır?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 7

2. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = (a+2)x^2 + (b-3)x + a+b$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(2016)$ kaçtır?

- A) 2
- B) 3
- C) 1
- D) 4
- E) 5

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{2x-5} + 6$ olduğuna göre $f^{-1}(38)$ kaçtır?

- A) 2
- B) 3
- C) 5
- D) 7
- E) 9

4. $f(x) = \begin{cases} 4x+2 & x < 4 \\ 2x-1 & x \geq 4 \end{cases}$, $g(x) = x-2$ olduğuna göre $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunun kuralı nedir?

- A) $4x-2$ $x < 4$
 $2x+2$ $x \geq 4$
- B) $4x-6$ $x < 4$
 $2x-3$ $x \geq 4$
- C) $2x+2$ $x < 6$
 $4x-2$ $x \geq 6$
- D) $4x-2$ $x < 6$
 $2x+2$ $x \geq 6$
- E) $4x-6$ $x < 6$
 $2x-3$ $x \geq 6$

Cevap Performansı

1	2	3	4
A	C	C	E
B	D	E	A
C	E	A	B
D	A	B	C
E	B	D	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretle, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
A, C, C, E

5. Gerçek kümesinde tanımlı,

I. $f(x) = 3x - 4$

II. $g(x) = x^2 + 4$

III. $h(x) = x^3$

fonksiyonlarından hangileri bire birdir?

A) Yalnız I

B) Yalnız II

C) I ve II

D) I ve III

E) I, II ve III

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \text{ rasyonel ise} \\ x^2, & x \text{ rasyonel değilse} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre

$f \circ f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{3}+1$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

E) $\frac{6}{5}$

7. f fonksiyonu $n \geq 1$ tam sayıları için,

$$f(n) = 3f(n-1) + 2 \text{ eşitliğini sağlıyor.}$$

$f(0) = 2$ olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

A) 15

B) 18

C) 22

D) 26

E) 35

8. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları,

$$(f+g)(x) = x^2 + 2$$

$$(f-g)(2x) = 2x - 4 \text{ eşitlikleri}$$

sağlanıyor. Buna göre, $f(2) \cdot g(2)$ çarpımı kaçtır?

A) -4

B) -2

C) 4

D) 8

E) 12

Cevap Performansı

5	6	7	8
D	C	D	D
E	D	A	B
A	E	B	C
B	A	C	E
C	B	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

D, C, D, D

MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ

Merkezi Eğilim Ölçüleri

Bir veri grubunda hangi değer etrafında toplanan sayısal değerlerdir. Bunlar aritmetik ortalama, ortanca (medyan) ve tepe değeri (mod) olarak adlandırılır.

Aritmetik Ortalama:

Bir veri grubunda bulunan verilerin toplamının veri sayısına bölünmesiyle elde edilen değere aritmetik ortalama denir ve " $\bar{X}$ " sembolü ile gösterilir.

$$\bar{X} = \frac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}}$$

formülü ile hesaplanır.

Ör

Hava durumunu sunan spiker bir şehrin bir haftalık sıcaklık değerlerini sırasıyla, 5° , 7° , 6° , 4° , 9° , 6° , x° olarak söylemiştir.

Bu şehrin bir hafta ortalama sıcaklık değeri 6 olduğuna göre, sonucu geçen sıcaklık değeri kaçtır?

ÖĞREN

Verilen aritmetik ortalama 6 ise;

$$\frac{5 + 7 + 6 + 4 + 9 + 6 + x}{7} = 6$$

$$x + 37 = 42 \quad x = 5 \text{ olur.}$$



Ağırlık Ortalama:

Bir veri grubundaki her bir verinin, veri ağırlığı ile çarpıldıktan sonra alınan toplamın, ağırlıkları toplamına bölünmesiyle elde edilen ortalamaadır.

Ör

Öğrenci Sayısı	2	3	4	2
Matematik Dersinde Aldıkları Puan	90	80	75	60

Yukarıdaki tabloda bir sınıftaki öğrenci sayısı ve matematik dersinde aldıkları puanlar verilmiştir. Buna göre bu öğrencilerin matematik puanlarının ortalaması kaçtır?

ÖĞREN

$$\frac{2 \cdot 90 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 75 + 2 \cdot 60}{2 + 3 + 4 + 2} =$$

$$\frac{840}{4} = 76,3 \text{ olur.}$$

Ortanca (Medyan) Değeri:

Bir veri grubunda medyanı bulmak için veriler önce küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe doğru sıralanır.

* Veri sayısı tek ise ortadaki veri medyanı verir.

* Veri sayısı çift ise ortadaki iki verinin aritmetik ortalaması medyanı verir ve Q_2 ile gösterilir.

12, 14, 16, 8, 6, 11, 15 veri grubunun medyanı;

ÖRNEK

6, 8, 11, 12, 14, 15, 16
↓
medyan



Sıralamanın ortasındaki sayı 12 olduğundan medyan $Q_2 = 12$ 'dir.

Tepe Değer (Mod):

Verilen ölçümleri sonucu elde edilen verilerden en çok tekrar eden veriye grubun tepe değeri (Modu) denir. Ayrıca bir veri grubunda en çok tekrar eden sayıya frekans denir.

* Bir veri grubunda birden fazla mod olabilir.

* Bir veri grubunda bütün sayılar aynı sayıda tekrar ediyorsa veri grubunun modu yoktur.

Çöz

Aşağıda verilen veri gruplarının varsa modunu bulunuz.

a) 1, 3, 4, 5, 6, 5, 7

b) 9, 8, 7, 7, 8, 10, 11

c) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 1, 1

d) 2, 2, 2, 2

ÖĞREN

a) 1, 3, 4, 5, 6, 5, 7 veri grubunda en çok tekrar eden 5 olduğu için mod değeri "5"tir.

b) 9, 8, 7, 7, 8, 10, 11 veri grubunda en çok tekrar eden veriler 7, 8 olduğundan modları "7 ve 8" dir.

c) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 1, 1 veri grubunda tüm veriler eşit sayıda tekrar ettiği için veri grubunun modu yoktur.

d) 2, 2, 2, 2 veri grubunda tüm veriler eşit olduğundan grubun modu "1"dir.

Merkezi Yayılım Ölçüleri

Bir veri grubunda tüm verilerden büyük olanına **en büyük değer**, tüm verilerden küçük olanına **en küçük değer** denir.

En büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka **açıklık** denir.

Çöz

Ali'nin aşağıda bir hafta boyunca günlük okuduğu kitap sayısının sayfası verilmiştir.

48, 36, 43, 53, 55, 32, 45

Bu veri grubunun açıklığını bulalım.

ÖĞREN

Veri grubunu sıralayalım.

32, 36, 43, 45, 48, 53, 55

- * En büyük değer $\Rightarrow 55$
- * En küçük değer $\Rightarrow 32$
- * Açıklık $\Rightarrow 55 - 32 = 23$ olarak bulunur.

Standart Sapma:

Standart sapma aşağıdaki adımlar sırasıyla izlenerek bulunur.

Verilerin aritmetik ortalaması verilir.

Her bir veri ile aritmetik ortalama arasındaki fark bulunur.

Bulunan farkların her birinin karesi alınıp toplanır.

Bulunan bu toplam veri sayısının 1 eksigine bölünerek kare kökü alınır.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ veri grubunun aritmetik ortalaması $\bar{X}$, standart sapması S olmak üzere;

$$S = \sqrt{\frac{(\bar{X} - x_1)^2 + (\bar{X} - x_2)^2 + \dots + (\bar{X} - x_n)^2}{n-1}}$$

olur.

"Gerçekçi ol;

bir mucize için plan yap!"

Osho

ÇÖZ

Ankara'nın Temmuz ayındaki beş günlük hava raporu aşağıda verilmiştir.

23, 26, 33, 25, 33

Bu verilerin tepe değeri, ortanca, aritmetik ortalama, açıklık ve standart sapmasını bulunuz.

ÖĞREN

Verileri küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

23, 25, 26, 33, 33

* Tepe değeri = 33 (en çok tekrar eden)

* Ortanca = 26

* Aritmetik Ortalama = $\frac{23+25+26+33+33}{5} = \frac{140}{5} = 28$

* En büyük değer = 33

* En küçük değer = 23

* Açıklık = $33 - 23 = 10$

* Standart Sapma = $\sqrt{\frac{(28-23)^2 + (28-26)^2 + (28-33)^2 + (28-25)^2 + (28-33)^2}{5-1}}$

$$= \sqrt{\frac{5^2 + 2^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 4 + 25 + 9 + 25}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{88}{4}}$$

$$= \sqrt{22} \approx 4,2 \text{ olur.}$$

Verilerin Grafik ile Gösterilmesi

Bir Veri Grubuna İlişkin Histogram Grafiği

Gruplandırılmış bir veri topluluğunda, verilerin tekrar etme sayılarının bitişik dikdörtgen şeklinde sütunlar hâlinde gösterimidir.

Histogram genelde sürekli verilerin gösteriminde kullanılır.

Grafik çizimi yapılırken aşağıdaki adımlar izlenir.



1) Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.

2) Açıklık bulunur.

3) İstenilen grup sayısı belirlenir. (Grup sayısı araştırma yapan kişiye göre değişir).

4) Grup genişliği $> \frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$ 'dır.

Grup genişliği, $\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup Sayısı}}$ değerinden büyük en küçük tam sayıdır.

Örneğin bu değer;

3 çıkarsa grup genişliği 4,

3,1 çıkarsa grup genişliği 4,

4,6 çıkarsa grup genişliği

5 olarak alınır.

Standart Puanlar

Z puanı = Verilenin ortalamadan ne kadar uzaklaştığını gösterir.

Negatif veya sıfır olabilir.

$$Z \text{ puanı} = \frac{\text{Kişinin Puanı} - \text{Aritmetik Ort.}}{\text{Standart Sapma}}$$

$$T \text{ Puanı} = T = 50 + 10 Z \text{ ile bulunur.}$$

ÇÖZ

Ortalaması 60, standart sapması 3 olarak hesaplanan bir sınavdan Kerem 75, Arda ise 84 almıştır. Buna göre Kerem ve Arda'nın Z ve T puanlarını bulunuz.

ÖĞREN

$$Z_K = \frac{75-60}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

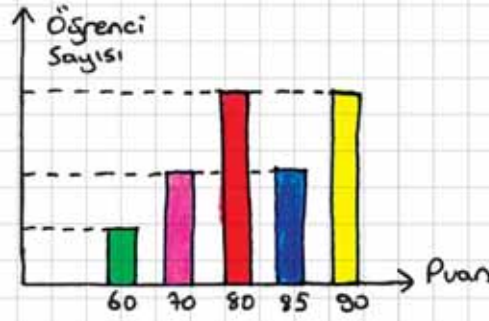
$$Z_A = \frac{84-60}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\begin{aligned} T_K &= 50 + 10 \cdot Z \\ &= 50 + 10 \cdot 5 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_A &= 50 + 10 \cdot Z \\ &= 50 + 10 \cdot 8 = 130 \end{aligned}$$

FÖZ

56 öğrencinin bulunduğu bir sınıftaki öğrencilerin tamamı matematik sınavına girmiş ve bu öğrencilerin tamamının bu sınavdan aldıkları puanlara göre sayıca dağılımı aşağıdaki sütun grafiğinde verilmiştir.



Bu sınavdan alınan puanların oluşturduğu veri grubunun tepe değerleri bulunmuş ve puanları bu değerler olan toplam öğrenci sayısının 36 olduğu görülmüştür. Ayrıca bu sınıftan 70'ten yüksek alan öğrenci sayısı 42 olarak hesaplanmıştır.

Buna göre, bu sınıfta bu sınavdan 60 puan alan öğrenci sayısı kaçtır?

ÖĞREN

En çok tekrar eden puanları alan kişiler 80 ve 90 puan alan kişilerdir. Yani 80 ve 90 alan kişi sayısı 36'dır. Ayrıca bu sınıfta 70'den yüksek alan kişi sayısı 42 olduğuna göre $42 - 36 = 6$ kişi 85 almış ve aynı şekilde 6 kişide 70 almıştır. 70 ve üzeri puan alan kişi sayısı toplamı 48 olduğuna göre $56 - 48 = 8$ öğrenci 60 almıştır.

1. Bir fabrikanın günlük ürettiği ürünlerin 9 gün boyunca miktarı (Ton);

1200, 1600, 1000, 1200, 1250, 900, 1000, 1200, 1450 şeklindedir.

Buna göre, bu veri grubunun, I. Ortalaması 1200'dür.

II. ortanca değeri 1800'dür.

III. tepe değeri 1600'dür.

İfadelerinden hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) I ve III E) II ve III

2. $x, 10, 14, 16$ sayılarının aritmetik ortalaması ile $y, 12, 18, 20, 24$ sayılarının aritmetik ortalaması aynı olduğuna göre, en küçük x ve y doğal sayılarının toplamı kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 21
D) 24 E) 27

3. Bir deneme sınavına katılan öğrenci sayısı ile yaptıkları doğru cevap sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Öğrenci Sayısı	8	4	a	6	7	10
Doğru Sayısı	16	20	10	15	14	12

Öğrencilerin doğru cevap sayılarının modu 10 ise 'a' sayısı en az kaçtır?

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

4. "x" pozitif tam sayı olmak üzere, $a+4, a+6, a+3, a+2, a+6, a+10$ sayı dizisinin tepe değeri 12 olduğuna göre, ortanca (medyan) değeri kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	C	D	C
D	E	A	D
E	A	B	A
A	B	C	B
B	D	E	E

Performansını görmek için cevaplarını işaretlerle, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

C, C, D, C

SAYMA**Toplama Yolu ile Sayma**

A ve B kümeleri ayrık iki küme ve $s(A)=a$, $s(B)=b$ olsun.

Bu iki kümenin elemanlarından yalnız 1 tanesi $a+b$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK

10 farklı gömlek
ve 6 farklı pantolon
1 gömlek



veya 1 pantolon $10+6=16$
farklı şekilde seçilebilir.

Farklama Yolu ile Sayma

A ve B kümeleri ayrık iki küme ve $s(A)=a$, $s(B)=b$ olsun.

Bu iki kümenin her birinden 1 tane eleman $a \cdot b$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK

8 farklı gömlek
ve 5 farklı pantolon
arasından 1



gömlek ve 1 pantolon $8 \cdot 5=40$
farklı şekilde seçilebilir.

ÇÖZ

Öğrenci Menüsü	
Yiyecekler	İçecekler
Dürüm	Ayran
Lahmacun	Kola
Pide	Soda
	Çay
1 yiyecek + 1 içecek 9 TL	

Hiper dürüm, öğrenci menüsü olarak yukarıdaki afiş bastırıyor. Bu afişte yapılan kampanyaya göre, bir öğrenci kaç farklı şekilde yemek seçimi yapabilir?

ÖĞREN

Dürümü dört farklı içeceklerle yiyebilir.

Lahmacunu dört farklı içeceklerle yiyebilir.

Pideyi dört farklı içeceklerle yiyebilir.

$(\text{Yiyecek Sayısı}) \cdot (\text{İçecek sayısı}) = 3 \cdot 4 = 12$ farklı şekilde seçim yapabilir.

PERMÜTASYON

* n, r pozitif tamsayılar ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin sıralı ikililerine o kümenin r 'li permutasyonu denir.

* $p(n, r)$ ile gösterilir.

* $p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ şeklinde hesaplanır.

ÖRNEK

$$\begin{aligned} p(8, 2) &= \frac{8!}{(8-2)!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} \\ &= 56 \text{ olur.} \end{aligned}$$



UYARI

- # n kişi düz bir sıraya $n!$ değişik sıralama ile oturabilir.
- # Kaç farklı yer değiştirebilir, dizilir ve sıralanır soruları genellikle permutasyon sorularıdır.
- # Sorularda yan yana ya da birlikte ifadeleri geçtiğinde onları bir düzünce sonra kendi içlerinde sıralarız.



ÇÖZ

4 kız, 5 erkek düz bir sıraya kızlar yan yana olmak şartıyla kaç farklı şekilde dizilir?

ÖĞREN

Kızlar yan yana duracaktır fakat kendi aralarında $4!$ farklı şekilde yer değiştirebilirler. Kızlar grup halinde hareket ettiği için 1 kişi yan yana $6!$ farklı şekilde sıralanabilir.

Toplamda $6! \cdot 4!$ farklı sıralama olabilir.

ÇÖZ

Birbirinden farklı 4 kimya, 5 fizik ve 6 matematik kitabı bir rafa dizilecektir.

- Tüm kitapların,
 - Fizik kitapları bir arada olmak şartıyla tüm kitapların,
 - Aynı tür kitapların bir arada olması şartıyla tüm kitapların,
- kaç farklı şekilde dizileceğini bulunuz.

ÖĞREN

a) $4+5+6 = 15$ kitap $15!$ şeklinde bir rafa dizilir.

b) Fizik kitapları yan yana olacaksa fizik kitapları bir kitap olarak kabul edilir.

$4+1+6 = 11$ kitap var gibi düşünülebilir.

$K_1, K_2, K_3, K_4, \boxed{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5}, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$
F

11 kitap $11!$ şeklinde sıralanır. Ayrıca 5 fizik kitabıda kendi içinde $5!$ şeklinde sıralanır.

Sonuç olarak fizik kitapları yan yana olacak şekilde $11! \cdot 5!$ farklı şekilde sıralanır.

c) $\boxed{K_1, K_2, K_3, K_4}, \boxed{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5}, \boxed{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6}$
K F M

Aynı tür kitaplar yan yana olacaksa bu kitaplar KFM yani $3!$ şeklinde sıralanır. Her derse ait kitap kendi aralarında yer değiştireceği için aynı tür kitapların bir arada olması şartıyla tüm kitaplar;

$3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6!$ farklı şekilde sıralanabilir.

KOMBİNASYON

* n, r pozitif tamsayı ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerine o kümenin r 'li kombinasyonu denir.

$$* c(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \text{ ise}$$

$a=b$ veya $a+b=n$ olmalıdır.

UYARI

• $\binom{n}{r}$ ifadesi pratik olarak aşağıdaki gibi açılır.

Pay kısmında n 'den başlayarak ardışık r tane sayı çarpılır. Payda kısmında 1'den başlayarak ardışık r tane sayı çarpılır.

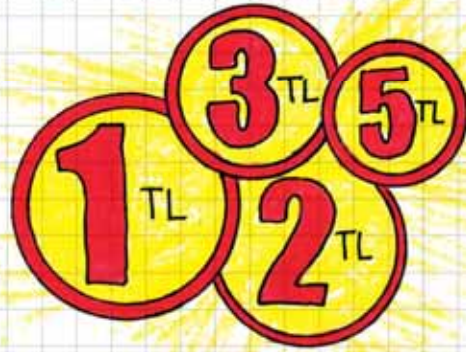
$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

ifadesinde $r=3$

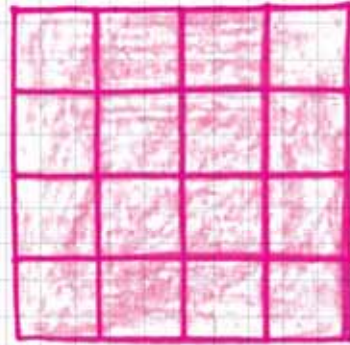


olduğu için pay kısmında 7'den başlanarak ardışık üç sayı, payda kısmında 1'den başlanarak ardışık üç sayı çarpılmıştır.

NE ALIRSAN



ÇÖZ



Yukarıdaki şekilde kaç dikdörtgen vardır?

ÖĞREN

Dikdörtgen olması için 2 tane yatay, 2 tane dikey çizgi seçelim.

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ tane dikdörtgen vardır.}$$

ÇÖZ

Bir grup futbolcu arasından seçilen 6 kişilik takım sayısı ile 9 kişilik takım sayısı eşit ise bu grupta kaç kişi vardır?

ÖĞREN

Futbolcu sayısı x olsun. x kişi arasında oluşturulacak b kişilik takım $\binom{x}{b}$; 9 kişilik takım sayısı $\binom{x}{9}$ olur.

$$\binom{x}{6} = \binom{x}{9} \text{ ise } x = 6 + 9 = 15 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

Süper Toto Süper Lig takımlarının oynadığı şampiyonluk turnuvasında 18 takım vardır. Her takım rakibiyle ikişer maç yapıyor. Turnuvada yapılan tüm maçların galibiyet, mağlubiyet ve berabere kalma durumu kaç farklı şekilde sonuçlanabileceğini bulunuz.

ÖĞREN

18 takım ikişer ikişer $C(18, 2) = \frac{18 \cdot 17}{2!} = 153$ biçimde eşleşir.

Her bir takım rakibi ile iki maç yapacağı için $153 \cdot 2 = 306$ maç yapılır.

Her bir maç 3 farklı şekilde sonuçlanabileceğinden 3^{306} farklı şekilde sonuçlanır.

ÇÖZ

Bir sınıfta herkes birbirini ile hediyeleşmiştir. Toplam hediye sayısı 36 olduğuna göre bu sınıfta kaç kişi vardır?

ÖĞREN

Hediye alan kişi sayısı x olsun.

Hediyeleşme gerçekleşmesi için iki kişilik grup oluşturmalıdır.

x kişi arasından 2 kişilik grup sayısı $\binom{x}{2}$ olur.

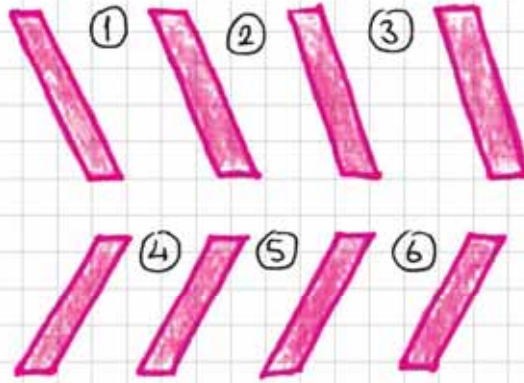
$$\text{Buna göre, } \binom{x}{2} = 72 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1)}{2} = 36 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 72$$

$$x = 9 \text{ olur.}$$

çöz

Bir otogaleri açılışa özel beş farklı markadan toplam altı otomobilini dışarıda sergileyecektir. Bu otomobilinin iki tanesi aynı marka geriye kalan dört tanesi farklı markalardan araçlardır.

Buna göre, aynı marka araçlar karşı karşıya ve yan yana gelmek şartıyla kaç farklı şekilde aşağıdaki park yerine park edilebilir?



ÖĞREN

Aynı marka otomobillerin yan yana geldiği durumlar
(1,2), (2,3), (4,5), (5,6)

Karşı karşıya geldiği durumlar
(1,4), (2,5), (3,6)

İstenilen = Tüm durum - İstenmeyen durum

$$= 6! - 7 \cdot \underbrace{2!}_{\substack{\text{iki araç} \\ \text{yer} \\ \text{değiştirebilir}}} \cdot \underbrace{4!}_{\substack{\text{geriye kalan} \\ \text{dört aracın} \\ \text{kendi içinde} \\ \text{sıralanması}}}$$

$$= 720 - 336$$

$$= 384 //$$

BINOM

Binom Açılımı

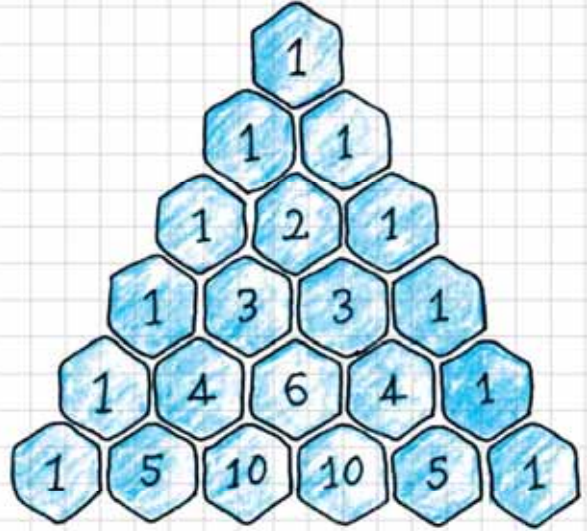
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1(a) \\
 & & & & & 1 & 1(b) \\
 & & & 1 & 2 & 1(c) \\
 & 1 & 3 & 3 & 1(d) \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1(e) \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

$a \rightarrow (x+y)^0, b \rightarrow (x+y)^1$
 $c \rightarrow (x+y)^2, d \rightarrow (x+y)^3$
 $e \rightarrow (x+y)^4$

Yukarıda verilen sayı üçgenine "pascal üçgeni" denir. Bu üçgende ki her satır 1 ile başlayıp 1 ile bitmekte ve her sayı kendi üstündeki iki sayının toplamı şeklinde bulunmaktadır. Bu üçgende ki sayılar $(x+y)^n$ açılımı yapıldığında her terimin önündeki x ve y'den bağımsız katsayıyı verir.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots$$

$+ \binom{n-1}{n} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$ bir binom açılımıdır. Bu değerleri kombinyonla ve pascal üçgeni ile bulabiliriz. Bu açılım x'in azalan ve y'nin artan kuvvetlerine göre yazılmıştır.



UYARI

$(x+y)^n$ açılımında;
 • Bütün terimlerde x'in ve y'nin kuvvetleri toplamı n'i vermelidir.

$n+1$ terim vardır.

$x=y=1$ için katsayıları toplamı bulunur.

Baştan $r+1$. terim

$\binom{n}{r}, x^{n-r}, y^r$ 'dir.

$(x+y)^{2n}$ açılımında ortadaki terim $\binom{2n}{n} \cdot x^n \cdot y^n$ olur.

ÇÖZ

$(3x+2y)^6$ ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamını bulunuz.

ÖĞREN

$$(3x+2y)^6 = \binom{6}{0} \cdot (3x)^6 \cdot (2y)^0 + \binom{6}{1} \cdot (3x)^5 \cdot (2y)^1 + \dots + \binom{6}{7} \cdot (2x)^0 \cdot (3y)^6$$

açılımından katsayıları bulup toplamalarını hesaplamak güç olduğundan

$x=1$ ve $y=1$ değerlerini ifadeye yerlerine yazalım.

$$(3 \cdot 1 + 2 \cdot 1)^6 = 5^6$$

ÇÖZ

$(x+y)^6$ ifadesinin açılımında baştan 3. terimi bulunuz.

ÖĞREN

$(x+y)^n$ ifadesinde $n=6$ 'dır.

Baştan 3. terim istendiğinden,

$r+1=3$ ise $r=2$ bulunur.

$\binom{n}{r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r$ ifadesinde $n=6$ ve $r=2$ değerleri yerlerine

konulduğundan

$$\binom{6}{2} \cdot x^{6-2} \cdot y^2 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} \cdot x^4 \cdot y^2 = 15 x^4 \cdot y^2$$

" Güneş ,

diz gökenlerden önce,
ayakta duranların üzerinde parlar. "

Chinua Achebe

ÇÖZ

$(x^3+y^2)^8$ ifadesinin açılımında,

a) ortadaki terimi bulunuz.

b) sondan 3. terimini bulunuz.

ÖĞREN

a) $(x^3+y^2)^8$ ifadesinde $2n=8$ ise $n=4$

$$\binom{8}{4} \cdot (x^3)^4 \cdot (y^2)^4 = 70 \cdot x^{12} \cdot y^8$$

b) $(x^3+y^2)^8$ ifadesinde $n=8$

sondan 3. terim istendiğinden

$$n-r+1=3$$

$$8-r+1=3$$

$$r=6$$

$\binom{8}{r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r$ ifadesinde $n=8$ ve $r=6$ yazılırsa

$$\binom{8}{6} \cdot x^{8-6} \cdot y^6 = 28 \cdot x^2 \cdot y^6 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{21}$ 'nin açılımında x^5 'li terimin katsayısı kaçtır?

ÖĞREN

$$\binom{21}{r} \cdot (x^3)^{21-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r = A x^5$$

$$\frac{x^{21-3r}}{x^r} = x^{21-4r}$$

$$21-4r=5 \quad 16=4r \quad r=4$$

$$\binom{21}{4} \cdot (x^3)^3 \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$= 35 \cdot x^9 \cdot \frac{1}{x^4} = 35 \cdot x^5 \text{ olarak bulunur.}$$

OLASILIK

* E örnek uzayında bir A olayının gerçekleşme olasılığı;

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)} \text{ 'dir.}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

* Olasılığı sıfır olan olaya imkansız olay denir.

* Olasılığı 1 olan olaya kesin olay denir.

UYARI

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A ve B iki olay olmak üzere,
A ve B bağımsız olay ise,
A ve B'nin birlikte olma olasılığı $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ A'nın B'ye bağı koşullu olasılığı $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olur.

ÇÖZ

Bir kutuda bulunan 8 ampülden 3'si bozuktur. Kutudan rastgele alınan 3 ampülden yalnız 1 tanesinin bozuk olma olasılığı kaçtır?

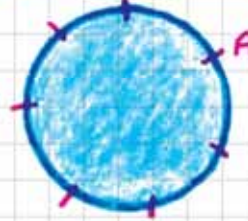
ÖĞREN

5 sağlam, 3 bozuk ampülden 2 sağlam ve 1 bozuk gelme olasılığı

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{10 \cdot 3}{56} = \frac{15}{28}$$



ÇÖZ



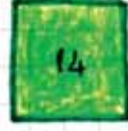
Yukarıdaki dairede üçgen oluşturmak için üç nokta seçiliyor. Buna göre, oluşturulan üçgenin bir köşesinin A olma olasılığı kaçtır?

ÖĞREN

$$\begin{aligned} \text{Olasılık} &= \frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} \\ &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5} \\ &= \frac{15}{35} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Çöz

Aşağıda üzerlerinde 10, 12, 14, 16 sayıları yazan dört kart gösterilmiştir.



Bu kartlara göre İlknur,
"Kartlardan rastgele ikisini seçip üzerlerinde yazan sayıları toplayacak olsam, kendi yaşıma bulma olasılığım $\frac{1}{3}$ olur" iddiasında bulunuyor.

Bu iddia doğru olduğuna göre, İlknur'un yaşı kaçtır?

Öğren

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 12 = 22 \\ 10 + 14 = 24 \\ 10 + 16 = 26 \\ 12 + 14 = 26 \\ 12 + 16 = 28 \\ 14 + 16 = 30 \end{array} \right\} \text{ Tm durum 6 tane}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$$

iki tane 26 olduğu için, İlknur'un yaşı 26'dır.

ÇÖZ

Hilal, Ahmet ve Sinem'in oynadığı bir körebe oyununda ebe olan kişi diğerlerinden birini yakalamakta ve yakalanan bu kişi yeni ebe olmaktadır. Sonra, oyun yeni ebe seçimi için de benzer şekilde devam etmektedir. Bu üç kişinin diğerlerini yakalamaya olasılıkları ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

* Hilal ebe ise %70 olasılıkla Ahmet'i, %30 olasılıkla Sinem'i yakalar.

* Ahmet ebe ise %80 olasılıkla Hilal'i, %20 olasılıkla Sinem'i yakalar.

* Sinem ebe ise %60 olasılıkla Ahmet'i, %40 olasılıkla Hilal'i yakalar.

Bu oyunda ilk ebe Hilal olduğuna göre, 3. ebinin tekrar Hilal olma olasılığı yüzde kaçtır?

ÖĞREN

Hilal'in Ahmet'i yakalama olasılığı, $\frac{70}{100}$, Ahmet ebe olduktan sonra Hilal'i yakalama olasılığı, $\frac{80}{100}$

$$1. \text{ ihtimal ; } \frac{70}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{56}{100}$$

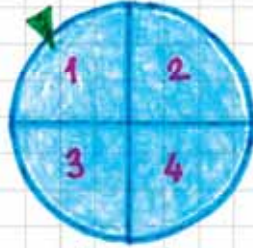
Hilal'in Sinem'i yakalama olasılığı, $\frac{30}{100}$, Sinem ebe olduktan sonra Hilal'i yakalama olasılığı, $\frac{40}{100}$

$$2. \text{ ihtimal ; } \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{12}{100}$$

$$1. \text{ ihtimal veya } 2. \text{ ihtimal} = \frac{56}{100} + \frac{12}{100} = \frac{68}{100} = \%68 //$$

ÇÖZ

Bir mağazada belirli miktar üzerinde alışveriş yapan müşteriler, 4 eş parçaya ayrılmış birinci çarkı iki defa çevirmektedir. Bu iki çevirişte gelen iki sayının toplamı 6 ya da 6'dan büyük ise 6 eş parçaya ayrılmış ikinci çark çevriliyor. Çıkan hediye alınıyor.



1. Çark



2. Çark

Buna göre, birinci çarkı çevirmeyi hak eden bir kahve makinası kazanma olasılığı kaçtır?

ÖĞREN

1. Çark için istenilen seçimler (1. seçilen, 2. seçilen)
 $\{(2,4), (3,3), (4,2), (3,4), (4,3), (3,4)\} \Rightarrow 6$ tane

Tüm seçim sayısı = $4 \cdot 4 = 16$

I. Çarkta 6 ya da 6'dan büyük olma olasılığı
 $= \frac{\text{istenilen seçim sayısı}}{\text{tüm seçim sayısı}} = \frac{6}{16}$

II. Çarkta kahve makinası gelme olasılığı = $\frac{1}{6}$

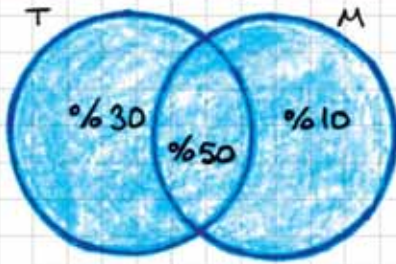
istenilen olasılık = $\frac{6}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$ elde edilir.

çöz

Bir okuldaki öğrencilerin tamamı matematik ve Türkçe derslerinin en az birini seçmiştir. Bu öğrencilerin %60 matematik, %80 Türkçe ve her iki dersi seçen %50'dir.

Okulda rastgele seçilen bir öğrencinin Türkçe dersini seçtiği bilindiğine göre, bu öğrencinin matematik dersinde seçmiş olma olasılığı kaçtır?

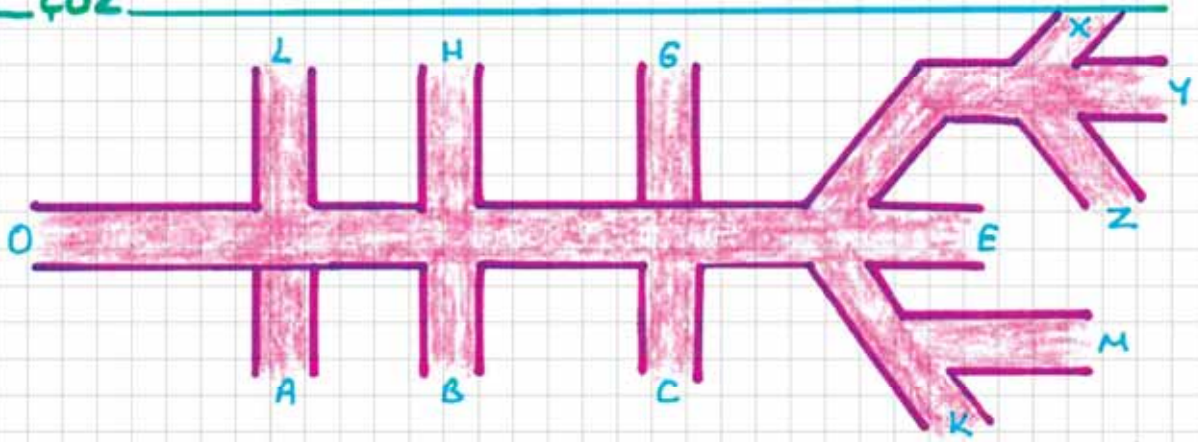
Öğren



Okuldaki öğrenci sayısı $100x$ olsun. Seçilen öğrencinin matematikten ders seçme olayı M ise $s(M) = 60x$, Türkçeden kayıt yaptıрма olayı T ise $s(T) = 80x$ her iki derstende kayıt yaptıрма olasılığı $M \cap T$ ise $s(M \cap T) = 50x$

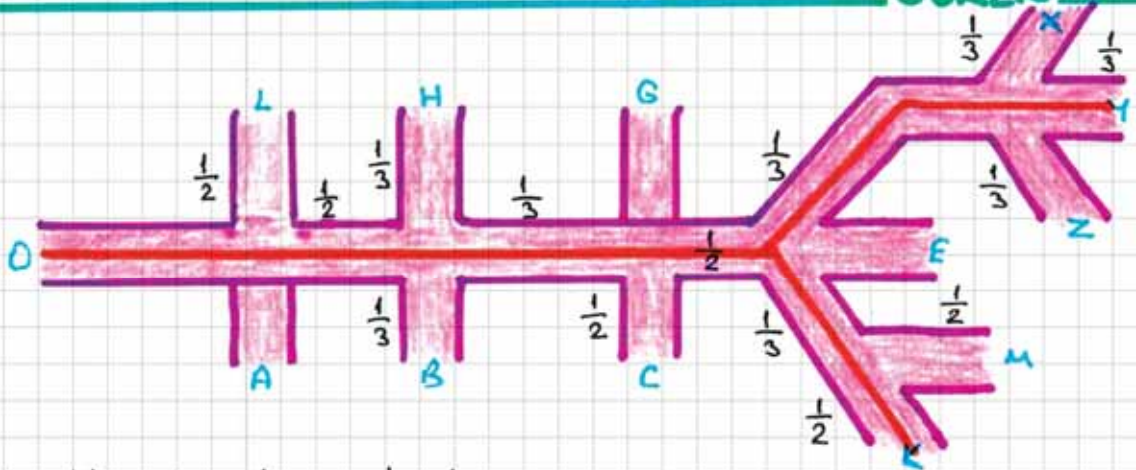
$$\frac{s(M \cap T)}{s(T)} = \frac{50x}{80x} = \frac{5}{8} \text{ olarak bulunur.}$$

Çöz



Yukarıdaki labirentlerde O noktasında yürümeye başlayan bir kişi yol ayrımlarının tümünde rastgele bir yol seçmiş ve seçtiği hiçbir yoldan geri dönmemiştir. A ve G noktasına çıkan yollar kapalı olduğu bilgisine göre bu kişinin K veya Y noktasından çıkmış olma olasılığını hesaplayınız.

Öğren



K noktasından çıkma olasılığı,

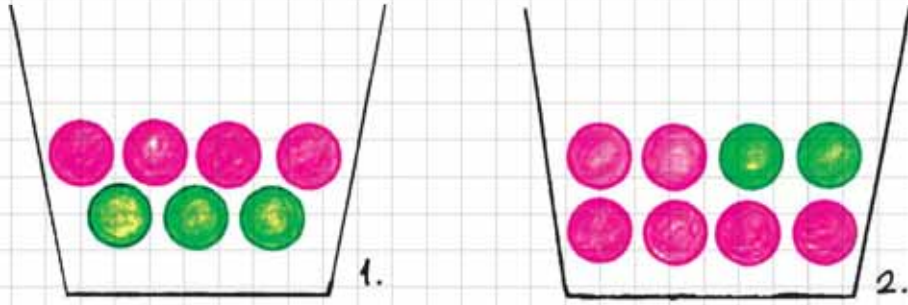
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$

Y noktasından çıkma olasılığı,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{108}$$

$$\frac{1}{72} + \frac{1}{108} = \frac{5}{216} //$$

ÇÖZ



Yukarıda verilen sepetlerin birincisinde 3 yeşil 4 pembe top bulunmaktadır. İkinci sepetin içinde ise 2 yeşil 6 pembe top bulunmaktadır. Bu sepetlerin birinde rastgele bir top çekiliyor. Çekilen bu topun yeşil olduğu bilindiğine göre bu topun birinci sepetten çekilme olasılığı kaçtır?

ÖĞREN

Birinci sepet S_1 , ikinci sepet S_2 , birinci sepetten yeşil top çekme olasılığı B_1 , ikinci sepetten yeşil top çekme olasılığı B_2 olsun.

Bu olaylar birbirinden bağımsız gerçekleştiği için herhangi bir sepetten yeşil çekme olasılığı,

$$P(B) = P(S_1 \cap B_1) + P(S_2 \cap B_2) = P(S_1) \cdot P(B_1) + P(S_2) \cdot P(B_2) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{19}{56}$$

Şimdi birinci sepetten yeşil top çekme olasılığı,

$$P(S_1 \cap B_1) = P(S_1) \cdot P(B_1) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{\text{İstenilen durum}}{\text{Tüm durum}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{19}{56}} = \frac{12}{19} //$$

1. 4 farklı cep telefonu ve 5 farklı fotoğraf makinesi arasından, 1 cep telefonu veya 1 fotoğraf makinesi satın almak isteyen bir kişinin kaç farklı seçeneği vardır?

A) 9
B) 12
C) 16
D) 20
E) 24

2. A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 6 değişik yol vardır. B kentine uğramak koşuluyla A kentinden hareket eden bir araç kaç farklı yolla C kentine gidebilir?

A) 10
B) 20
C) 24
D) 30
E) 32

3. Birbirinden farklı 8 rakamdan oluşan elektronik posta şifresinin ilk üç rakamını bilen ve son rakamının 6'dan büyük olduğunu hatırlayan bir kişi, en çok kaç denemede şifresini bulabilir?

A) 720
B) 800
C) 960
D) 1080
E) 1200

4. 6 değişik beden ölçüsü, 4 değişik renk ve 5 değişik modelde pantolonlar satan bir mağazada en az kaç tane pantolon bulunmalıdır ki her duruma uygun en az bir pantolon olsun?

A) 15
B) 30
C) 48
D) 60
E) 120

Cevap Performansı

1	2	3	4
A	C	D	E
B	D	E	A
C	E	A	B
D	A	B	C
E	B	C	D

Performansını görmek için cevaplarını işarette, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
A, C, D, E

5. Analarında Arda ve Okan'ın da bulunduğu 6 kişilik bir arkadaş grubu yan yana durup fotoğraf çektirecektir.

Arda ve Okan'ın yan yana olması koşuluyla kaç farklı sıralama yapılabilir?

- A) 60
B) 120
C) 240
D) 480
E) 720

6. 4 kız 3 erkek öğrenciden oluşan 7 kişilik bir folklor grubu, iki kız öğrencinin arasında bir erkek öğrenci olacak şekilde yan yana kaç farklı sıralama oluşturabilir?

- A) 35
B) 72
C) 144
D) 216
E) 288

7. KARAKALEM

kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek elde edilen 9 harfli anlamlı veya anlamsız kelimelerin kaç tanesinde her A harfinden sonra K harfi gelir?

- A) 1440
B) 1680
C) 2520
D) 2880
E) 3600

8. 7 doktor ve 4 hemşire arasından, içerisinde en az 1 doktor bulunan 3 kişilik bir sağlık grubu kaç farklı şekilde seçilebilir?

- A) 112
B) 125
C) 141
D) 161
E) 165

Soru Çözümü

Cevap Performansı

5	6	7	8
C	C	C	D
D	E	A	B
E	A	B	C
A	B	D	E
B	D	E	A

Performansını görmek için cevaplarını işarette, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
C, C, C, D

9. Bir okuldaki 10 tane seçmeli dersin 3 tanesi aynı gün ve aynı saatte, diğer dersler ise farklı gün ve saatlerde verilmektedir. Derslere devam etmenin zorunlu olduğu bu okuldan bu şartı yerine getirmek koşuluyla 4 ders seçmek isteyen bir öğrenci için kaç farklı ders programı hazırlanabilir?

- A) 105
- B) 125
- C) 140
- D) 155
- E) 160

10. Bir torbadaki beyaz topların sayısı, siyah topların sayısının 3 katından 2 fazladır. Bu torbadan rastgele seçilen bir topun beyaz olma olasılığı $\frac{4}{9}$ olduğuna göre, torbada kaç top vardır?

- A) 16
- B) 18
- C) 24
- D) 27
- E) 36

11. Bir sınıfta 15 öğrenci vardır. Sınıftan rastgele seçilen iki kişinin ikisinin de erkek olma olasılığı $\frac{2}{21}$ olduğuna göre, sınıfta kaç kız öğrenci vardır?

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 11
- E) 12

Soru Çözümleri

Cevap Performansı

9	10	11
C	B	C
D	C	E
E	D	A
A	E	B
B	A	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

C, B, C

12. Sabit bir hedef vardır. A isimli okçunun hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{7}$ ve B isimli okçunun hedef vurma olasılığı $\frac{1}{3}$ 'tür. Bu hedefin A veya B tarafından vurulma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{21}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{11}{21}$
D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{13}{21}$

13. İki ayrı iskambil kağıdının birini seçmek durumunda kalan bir oyuncunun, kartlardan birini seçtiğinde kazanma olasılığı $\frac{1}{3}$ 'tür. Oyuncu, bu olasılıkları

bilmeden rastgele bir seçim yaptığında kazanma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{15}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{11}{30}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

14. Düzgün bir zarın iki yüzünde K, üç yüzünde A harfi ve bir yüzünde de R harfi yazmaktadır. Bu zar peşpeşe 4 kez atıldığında gelen sonuçların sırasıyla KARA olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{72}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{5}{36}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{3}{4}$

15. Rastgele yazılan 3 basamaklı bir doğal sayının rakamlarının farklı ve 5 ile bölünebilen bir tek sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{2}{45}$ C) $\frac{8}{75}$
D) $\frac{4}{125}$ E) $\frac{16}{225}$

Cevap Performansı

12	13	14	15
C	C	A	E
D	E	B	A
E	A	C	B
A	B	D	C
B	D	E	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru cevaplar
C, C, A, E

POLİNOMLAR

* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_0$ şeklinde tanımlanan ifadenin polinom olması için; a_0, a_1, a_2, a_n gibi katsayıları reel sayı olmalı ve dereceleri doğal sayı olmalıdır.

Aşağıda verilen ifadelerden polinom olanları belirleyelim.



a) $p(x) = 3x^{-2} + 6x + 4$ polinom değildir. Çünkü $3x^{-2}$ ifadesindeki "x" değişkeninin üssü "-2" bir doğal sayı değildir.

b) $Q(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x - 5$ polinomdur. Çünkü katsayıları gerçek sayı, "x" değişkeninin üssü doğal sayıdır.

c) $R(x) = \frac{3}{x^2} + 6x + 5$ polinom değildir. Çünkü $\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ olduğu için "x" değişkeninin üssü doğal sayı değildir.

d) $\sqrt{2}x - 5$ polinom değildir. Çünkü "x" değişkeninin katsayısı " $\sqrt{2}$ " gerçek sayı değildir.

ÖRNEK



UYARI

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ polinomunun derecesi $\deg[p(x)]$ biçiminde gösterilir. $x=0$ yazılırsa sabit terim bulunur.

$x=1$ yazılırsa katsayıları toplamı elde edilir.

En büyük dereceli terimin katsayısına baş katsayı denir. $p(x)$ polinomunda çift kuvvetli terimlerin katsayıları toplamı $\frac{p(1) + p(-1)}{2}$

şeklinde bulunur.

Tek kuvvetli terimlerin katsayıları toplamı ise

$\frac{p(1) - p(-1)}{2}$ şeklinde bulunur.

Polinomlarda Dereceler

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

bu polinomlar için $m > n$ olmak üzere,

$$\# \text{ der}(P(x) \pm Q(x)) = \max(m, n) = m$$

$$\# \text{ der}(P(x) \cdot Q(x)) = m + n$$

$$\# \text{ der}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = m - n$$

$$\# \text{ der}(P^k(x)) = k \cdot n$$

UYARI

$P(x)$ polinomunun $(x-a)$ ile bölümünden kalanı bulurken $x-a=0$ yazılır. $P(a)$ kalan olur.

ÇÖZ

$p(x) = 2 \cdot x^{\frac{12}{n}} + 3x^{n-3} + 11$ ifadesi bir polinom olarak belirtildiğine göre, n 'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

ÖĞREN

Polinomun dereceleri doğal sayı olmalıdır.

$$\frac{12}{n} \in \mathbb{N} \text{ ve } (n-3) \in \mathbb{N}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$n-3 \geq 0$$

$$n \geq 3$$

Bunları düşünürsek;

$$3, 4, 6, 12 \rightarrow \text{toplamı} = 25$$

ÇÖZ

$P(x) = x^{10} - 2 \cdot x^5 + 3$ polinomunun $x^5 - 3$ ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

ÖĞREN

$$x^5 - 3 = 0$$

$$x^5 = 3 \rightarrow \text{polinomda yerine}$$

yazalım;

$$p(x) = (x^5)^2 - 2 \cdot x^5 + 3$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 + 3$$

$$= 9 - 6 + 3$$

$$= 6 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ

$p(x-1)$ ve $Q(x+1)$ polinomları arasında;

$$Q(x+1) = (x^2 + 5) \cdot P(x-1)$$

bağıntısı veriliyor. $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 3 olduğuna göre, $Q(x)$ polinomunun $x-3$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖĞREN

$$P(1) = 3 \text{ ve } Q(3) \text{ bulalım.}$$

Denklemden $x=2$ yazarsak;

$$Q(x+1) = (x^2 + 5) \cdot P(x-1)$$

$$Q(3) = 9$$

$$P(1) = 3 \cdot 3 = 27$$

ÇÖZ

$P(x)$ polinomunun sabit terimi 2 ve $P(x) - P(x-1) = x+2$ olduğuna göre, $P(x+2)$ polinomunun $x-4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

ÖĞREN

$P(x)$ polinomunun sabit terimi 2 ise $P(0)=2$ $P(x+2)$ polinomunun $x-4$ ile bölümünden kalan $x-4=0$ için

$$x=4 \Rightarrow P(4+2) = P(6) \text{ 'dır.}$$

$$x=1 \text{ için } P(1) - P(0) = 3$$

$$x=2 \text{ için } P(2) - P(1) = 4$$

$$\vdots$$

$$x=6 \text{ için } P(6) - P(5) = 8$$

$$+ \frac{P(6) - P(0)}{2} = \frac{8 \cdot 9}{2} - 3$$

$$P(6) - 2 = 36 - 3$$

$$P(6) = 35 \text{ olur.}$$

ÇÖZ

Katsayıları $(0, 1, 2, \dots, 9)$ kümesinin elemanlarından ve bir kökü $-\frac{4}{3}$ olan ikinci dereceden polinomların sayısı kaçtır?

ÖĞREN

$$P(x) = (3x+4) \cdot (ax+b)$$

$$= 3ax^2 + 3xb + 4ax + 4b$$

$$= 3ax^2 + x(4a+3b) + 4b$$

"a" yerine 1, 2 elemanları tek yazılabilir. Çünkü bu elemanlar dışında yazılanlar katsayıları $(0, 1, 2, \dots, 9)$ kümesinin dışına çıkıyor.

$$a=1 \text{ için } 3b+4 \begin{cases} 2 \text{ polinom} \\ b=0,1 \end{cases} \text{ burdan}$$

$$a=2 \text{ için } 3b+8 \begin{cases} 1 \text{ polinom} \\ b=0 \end{cases} \text{ burdan}$$

$$a=3 \text{ için } 3b+12 \text{ olur.}$$

Burda $(0, 1, 2, \dots, 9)$ kümesinin dışında bir eleman olduğundan $a \geq 3$ olmaz.

Toplamda 3 polinom yazılabilir.

Çöz

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun sabit terimi 6 olur. $P(x)$ polinomu $(x-2) \cdot (x+2)$ ile tam bölünebilmektedir.

Buna göre, bu polinomun katsayıları toplamı kaçtır?

Öğren

$P(x)$ polinomunun sabit terimi 6 ise

$$P(0) = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \Rightarrow c = 6 //$$

Yine bu polinom $(x-2) \cdot (x+2)$ ile tam bölünebiliyorsa

$$P(2) = P(-2) = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$P(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + 2b + 6$$

$$\Rightarrow 8 + 4a + 2b + 6 = 0$$

$$= 4a + 2b = -14 \text{ ----- (1)}$$

$$P(-2) = (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2)b + 6$$

$$\Rightarrow -8 + 4a - 2b + 6$$

$$= 4a - 2b = 2 \text{ ----- (2)}$$

1 ve 2 eşitliğinden,

$$4a + 2b = -14$$

$$4a - 2b = 2$$

$$\hline 8a = -12$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

$$4b = -16$$

$$b = -4$$

0 hâlde, katsayılar toplamı;

$$P(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4x + 6$$

$$P(1) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{4}{2} + 6$$

$$= 7 - \frac{7}{4}$$

$$= \frac{21}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

1. $P(x)$ bir polinom ve $P(x^4) = x^8 + (a-1)x^7 + (b-2)x^5 + x^4 - 1$ olduğuna göre, $P(1)$ kaçtır?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

2. $(x+1) \cdot P(x-2) = x^2 - 3x + a$ eşitliğine göre, $P(-3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -2
- B) -3
- C) -5
- D) -9
- E) 0

3. $P(x) = 2x^{\frac{2m-8}{m}} + x - 4$ bir polinom olduğuna göre, m tamsayı değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 1
- B) 2
- C) 4
- D) 5
- E) 6

4. $\text{der}[P^3(x) \cdot Q(x^2)] = 19$ ve $\text{der}\left[\frac{P^2(x)}{Q(x^3)}\right] = 4$ ise,

$\text{der}[P(x)]$ kaçtır?

- A) 0
- B) 2
- C) 4
- D) 5
- E) 6

5. $P(2x+3) = x^2 - 4x + 1$ ise $P(x-3)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 9
- B) 11
- C) 13
- D) 15
- E) 17

cevaplar

Cevap Performansı

1	2	3	4	5
A	C	C	D	C
B	D	E	C	D
C	E	A	D	E
D	A	B	E	A
E	B	D	B	B

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

A, C, C, D, C

6. 3. dereceden bir $P(x)$ polinomunun çarpanları $(x-1)$, $(x+2)$ ve $(x-3)$ 'tür. $P(x)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalan 16 ise, $P(x-2)$ 'nin $x-4$ ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) -8
- B) -6
- C) -2
- D) 0
- E) 4

7. $P(x)$ polinomunun x^2-3x+1 ile bölümünden kalan $x+3$ ise $P^2(x)$ 'in x^2-3x+1 ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) $3x+4$
- B) $9x+8$
- C) $-2x-7$
- D) $3x^2+7x$
- E) $-2x^2$

8. $P(x)$ polinomunun x^3+1 ile bölümünden kalan x^2+3x-2 ise $P(x)$ polinomunun x^2-x+1 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x+7$
- B) $4x-3$
- C) $8x$
- D) $-7x+3$
- E) $2x-9$

Soru 6

Cevap Performansı

6	7	8
A	B	B
B	C	D
C	D	E
D	E	A
E	A	C

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.
Doğru Cevaplar
A, B, B

2. DERECE DENKLEMLER

* $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ ifadesine x 'e bağıt 2. dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Denklemi sağlayan x değerlerine denklemin kökü denir.

UYARI

$\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere,

* $\Delta > 0$ iken kökler x_1 ve x_2 ise $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

* $\Delta = 0$ ise $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ 'dır.

Kökleri ile katsayı arasındaki ilişki $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere;

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$|x_1, x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Simetrik iki kök varsa;

$x_1 + x_2 = 0$ ve $x_1 \cdot x_2 < 0$ olur.

* $\Delta < 0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Kökler sanaldır.

* Kökleri x_1 ve x_2 olan 2. dereceden denklem

$x_1 + x_2 = T$ ve $x_1 \cdot x_2 = G$ ise

$x^2 - Tx + G = 0$ 'dır.



ÇÖZ

$x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 'dir. Buna göre, $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$ eşitlikleri kullanılır.

$$= \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{x_2 - 2 + x_1 - 2}{x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 - 4}{x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}$$

$$= \frac{5 - 4}{1 - 2 \cdot 5 + 4} = -\frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

Çöz

$$x^2 - 2mx + x - 2 = 0$$

denkleminin bir kökü 2 olduğuna göre, m kaçtır?

Öğren

Denklemin kökünü denkleme x yerine yazınca sağlamak zorundadır.

$$2^2 - 2m \cdot 2 + 2 - 2 = 0$$

$$4 - 4m = 0$$

$$m = 1 \text{ olmalıdır.}$$

Çöz

$x^2 - 8x + m + 1 = 0$ denkleminin birbirine eşit (çakışık) iki reel kökü bulunduğuna göre, m kaçtır?

Öğren

Çakışık iki kökü olması için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+1) = 0$$

$$64m - 4m - 4 = 0$$

$$4m = 60$$

$$m = 15$$

Çöz

$$x^2 + (m+1)x + 10 = 0 \text{ ve}$$

$x^2 + (m-7)x - 6 = 0$ denkleminin birer kökleri eşit olduğuna göre, m kaçtır?

Öğren

Denklemleri ortak çözersek;

$$x^2 + mx + x + 10 = x^2 + mx - 7x - 6$$

$$x + 10 = -7x - 6$$

$$8x = -16$$

$$x = -2 \text{ olmalıdır.}$$

$x = -2$ denkleme yerine yazılırsa;

$$(-2)^2 + (m+1) \cdot (-2) + 10 = 0$$

$$m = 6 \text{ bulunur.}$$

"Bazı insanlar
olmasını ister,
bazıları
olmasını bekler,
bazıları ise
oldurur."
Michael Jordan

2. Dereceden Denklemlerin Karmaşık Kökleri

* $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$z = a + ib$ şeklinde tanımlanan sayılara kompleks sayılar denir. Bu sayılarda a 'ya reel kısım, b 'ye ise sanal (imaJiner) kısım adı verilir.

$\text{Re}(z) = a$ ile $\text{Im}(z) = b$ ile gösterilir.

$z = a + ib$ 'nin eşleniği;

$$\bar{z} = a - ib$$

* $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olması halinde denklemin reel sayılarda çözüm kümesi yoktur. $\sqrt{-1} = i$ kabul edersek $i^2 = -1$ olur.

UYARI

$i^2 = -1$ ve $n \in \mathbb{Z}$

$$i^0 = i^4 = i^{12} = i^{-20} \rightarrow i^{4n} = 1$$

$$i^1 = i^5 = i^{13} = i^{-11} \rightarrow i^{4n+1} = i$$

$$i^2 = i^{10} = i^{14} = i^{-18} \rightarrow i^{4n+2} = -1$$

$$i^3 = i^{15} = i^{-1} \rightarrow i^{4n+3} = -i$$

i 'nin kuvveti sorularında üst 4'e bölünüp kalan bulunur.

Yukarıdaki şekilde alınır.

$$\underbrace{i^1 + i^2 + i^3 + i^4}_0 = \underbrace{i - 1 + i + 1}_0$$

* z_1 ve z_2 karmaşık sayıları eşit ise $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ $a = c$ ve $b = d$ olur.

$$z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = a - c + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id)$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

ÇÖZ

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2017} + i^{2018}$$

işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$\underbrace{i^1 + i^2 + i^3 + i^4}_0 + \underbrace{i^5 + i^6 + i^7 + i^8}_0 + \dots$$

2017 ve 2018'de bölünür önce kalan $i^1 + i^2$ olur.

$$i^1 = i \quad i^2 = -1$$

$$= i - 1$$

ÇÖZ

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$(1 - i)^{40} + (1 + i)^{40}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÖĞREN

$$((1 - i)^2)^{20} + ((1 + i)^2)^{20}$$

$$= (1 - 2i + i^2)^{20} + (1 + 2i + i^2)^{20}$$

$$= (-2i)^{20} + (2i)^{20}$$

$$= 2^{20} \cdot i^{20} + 2^{20} \cdot i^{20}$$

$$= 2 \cdot 2^{20} \rightarrow 2^{21} \text{ bulunur.}$$

1. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-6}$ işleminin sonucu nedir?

- A) $-6\sqrt{2}i$
- B) $-3\sqrt{2}i$
- C) $\sqrt{2}i$
- D) $3\sqrt{2}i$
- E) $6\sqrt{2}i$

2. $z = 2 - 3i$

$$w = 4 + 5i$$

olduğuna göre, $z \cdot w$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $23 - 2i$
- B) $23 + 2i$
- C) $25 + 3i$
- D) $26 + 3i$
- E) $30 + 4i$

$$3. z = \frac{3+5i}{2-i} + \frac{1}{2+i}$$

olduğuna göre, $z - (\bar{z})$ kaçtır?

- A) -2
- B) -1
- C) 0
- D) 1
- E) 2

4. $x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2 - 2\sqrt{2}i$
- B) $1 - \sqrt{2}i$
- C) $1 - i$
- D) $1 + i$
- E) $2 + 2\sqrt{2}i$

Soru Çözümleri

Cevap Performansı

1	2	3	4
A	A	C	B
B	C	D	C
C	D	E	D
D	E	A	E
E	B	B	A

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, aralarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar

D, C, B, E

5. a ve b sıfırdan ve birbirinden farklı gerçel sayı olmak üzere,
 $x^2 + (a+4)x + b - a = 0$
 denkleminin köklerinden biri
 $a-b$ sayısıdır. Buna göre, $\frac{b}{a}$

oranı kaçtır?

- A) $-\frac{5}{2}$
 B) $-\frac{1}{2}$
 C) 0
 D) $\frac{3}{2}$
 E) $\frac{5}{2}$

6. İki gerçel kökü olan
 $x^2 + 4x + a = 0$ denkleminin
 kökler çarpımı,
 $x^2 + 4x + a = 0$ denkleminin
 bir köküdür. Buna göre, a
 kaçtır?

- A) -5
 B) -4
 C) -3
 D) -2
 E) -1

7. k bir gerçel sayı olmak üzere,
 $kx^2 - 9x + 9 = 0$ denkleminin
 köklerinden biri diğerinin
 2 katıdır. Buna göre,
 k kaçtır?

- A) -1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
 E) 6

Soru 5

Cevap Performansı

5	6	7
A	A	B
B	C	D
C	D	E
D	E	A
E	B	C

Performansını görmek için
 cevaplarını işaretleye, aralarını
 çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
 A, A, B

PARABOL

* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $y = ax^2 + bx + c$ biçiminde fonksiyonlara gerçel sayılar kümesinde tanımlı ikinci dereceden fonksiyon, bu fonksiyonun grafiğine de parabol denir.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $x=0$ için y eksenini kestiği $A(0, c)$ bulunur.

$y=0$ için x eksenini kestiği nokta (varsa) bulunur.

Tepesi noktasının koordinatları

$T(r, k)$ 'dir. $r = -\frac{b}{2a}$ 'dır.

$T(r, f(r))$ şeklinde de bulunabilir.

UYARI

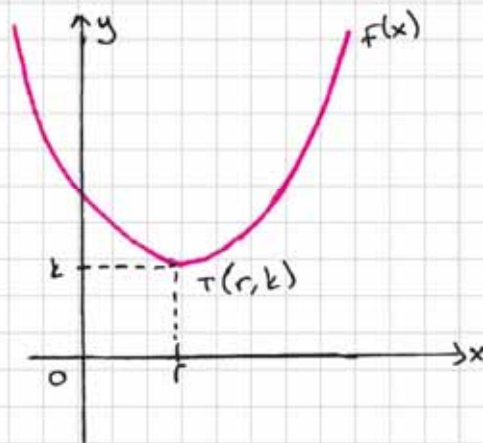
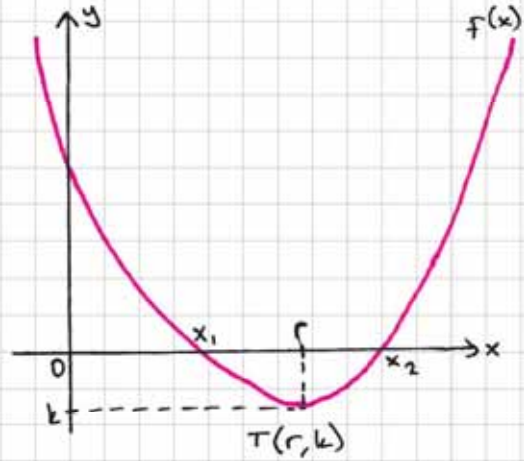
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu için;

$a > 0$ ise grafiğin kolları yukarı (U) doğrudur.

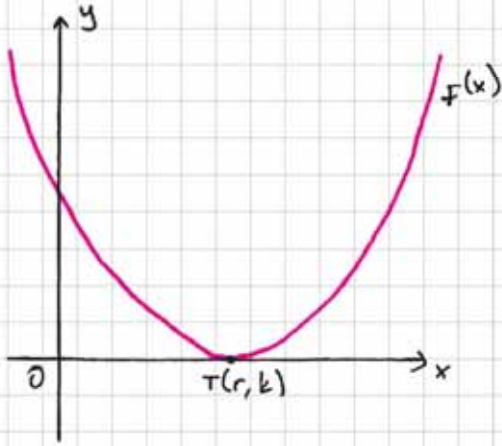
$a < 0$ ise grafiğin kolları aşağı (∩) doğrudur.

$\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

$\Delta > 0$ ise x eksenini iki farklı noktada keser.



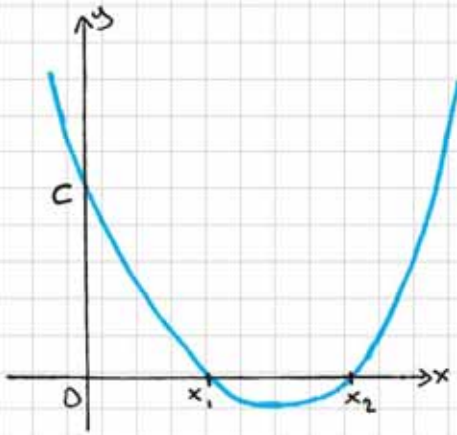
$\Delta < 0$ ise x eksenini kesmez.



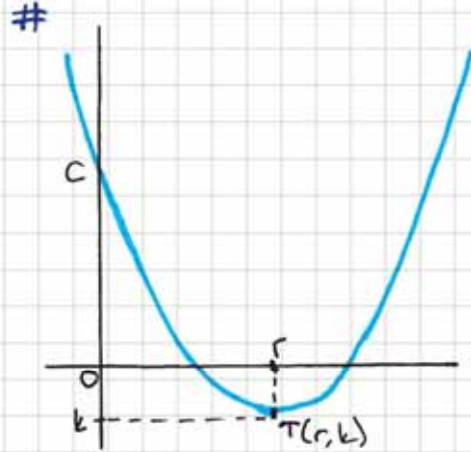
$\Delta=0$ ise x eksenini tek noktada kesmektedir. Parabolün simetri eksenini $x=r$ doğrusudur.

Parabolün Denklemini Yazma

Eksenleri kestiği noktalar x_1 ve x_2 olan parabolün denklemi,



$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ şeklinde yazılır. Parabol üzerinde bir nokta kullanılarak a bulunabilir.



Tepesi noktası bilinen parabol grafiği yukardaki gibidir. $y=a(x-r)^2+k$ şeklindedir.

ÖZ

$f(x) = 2x^2 + (a-3)x + b-1$ parabolünün tepesi noktası $T(-1, 2)$ olduğuna göre, $a+b$ toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$$T(r, k) \rightarrow r = -\frac{b}{2a} \text{ ve}$$

$$f(r) = k \text{ olur.}$$

$$r = -\frac{(a-3)}{2 \cdot 2} = -1$$

$$a-3=4 \quad a=7 \text{ olur.}$$

$$f(r) = k \rightarrow [f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + b-1]$$

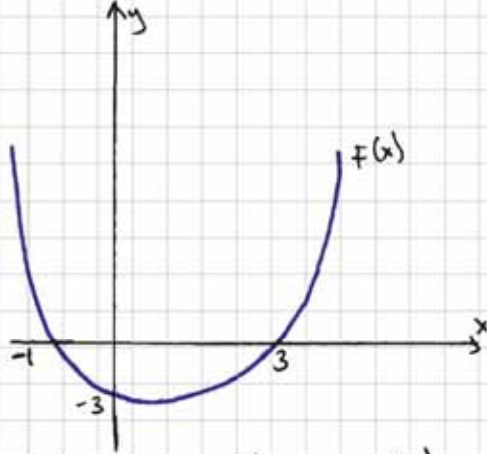
$$f(-1) = 2 = 2 - 4 + b - 1$$

$$2 = b - 3$$

$$b = 5 \text{ olur.}$$

$$a+b = 7+5 = 12 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ



Yukarıda verilen $y=f(x)$ parabolü $A(4, k)$ noktasından geçtiğine göre, k kaçtır?

ÖĞREN

Eksenleri kestiği noktalar bilinen parabol denklemini kullanırsak

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x + 1)(x - 3) \text{ olur.}$$

y eksenini üzerindeki $(0, -3)$ noktası denkleme yazılırsa;

$$-3 = a(a + 1)(a - 3)$$

$$-3 = -3a$$

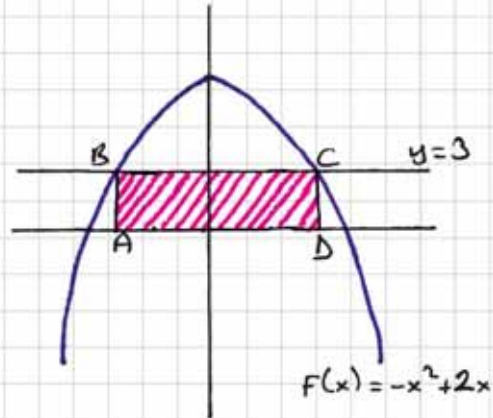
$$a = 1 \text{ bulunur.}$$

$y = 1(x + 1)(x - 3)$ denklemini elde edilir.

$(4, k)$ noktası parabolde yerine yazılırsa; $k = 1(4 + 1)(4 - 3)$

$$k = 5 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ



Yukarıdaki şekildeki ABCD dik dörtgeninin alanı kaç birim karedir?

ÖĞREN

$f(x) = y$ olduğuna göre,

$$f(x) = y = -x^2 + 2x \text{ olur.}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ bulunur.}$$

Denklemini çarpanlarına ayırırsak, $(x - 3)$ ve $(x + 1)$ bulunur.

Bu noktalar sayesinde parabolün x eksenini kestiği noktalar bulunur.

A noktası $(-1, 0)$

D noktası $(3, 0)$

mesafe, 4 birimdir.

A ve B arası 3 birimdir.

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ birim karedir.}$$

ÇÖZ

$f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $f(x) = x^2 + 6$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değer ile en büyük değer toplamı kaçtır?

ÖĞREN

$a > 0$ olduğu için, kollar yukarı doğrudur ve tepe noktası

$r = -\frac{b}{2a}$ şeklinde bulunur.

$r = -\frac{b}{2a} = 0$ değeri $[-3, 2]$

aralığında olduğu için en küçük değerdir.

$$f(0) = 0^2 + 6 = 6$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 6 = 15$$

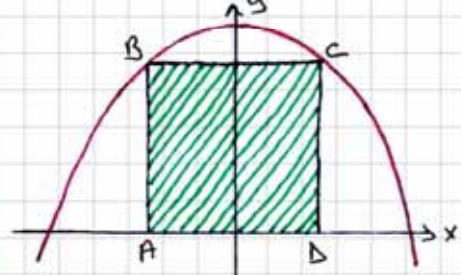
$$f(2) = 2^2 + 6 = 10$$

en büyük değer : 15

en küçük değer : 6

$$15 + 6 = 21 \text{ bulunur.}$$

ÇÖZ



ABCD karesinin A ve D köşeleri x ekseninde, B ve C köşeleri $f(x) = -x^2 + 8$ parabolü üzerindedir.

ABCD karesinin alanı kaç birimdir?

ÖĞREN

D noktasına (a, a) noktası, C noktasına $(a, 2a)$ noktası diyelim,

D noktasını denkleme yazalım. (A ve D noktaları orijine eşit uzaklıktadır.)

$$2a = -a^2 + 8$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a+4)(a-2) = 0$$

$$a = 2 \text{ bulunur.}$$

ABCD karesinin bir kenarı

$$2a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ birimdir.}$$

Karenin alanı a^2 olduğundan;

$$4^2 = 16 \text{ olur.}$$

1. Bir malın alış fiyatı x , satış fiyatı y 'dir.

$$y = -x^2 + 3x + 8 \text{ bağıntısı veriliyor.}$$

Kârın en çok olması için, alış fiyatı ne olmalıdır?

- A) 2
B) 7
C) 9
D) 11
E) 12

2. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ fonksiyonunun $[-1, 4]$ aralığındaki en büyük ve en küçük değerlerin toplamı kaçtır?

- A) 10
B) 12
C) 13
D) 17
E) 21

3. $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ fonksiyonunun $(0, 4]$ aralığındaki

görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $[2, 27]$
B) $[4, -15]$
C) $(5, -35]$
D) $[0, 7)$
E) $(5, -20]$

4. $f(x) = x^2 + (a-2)x + 4$ parabolü x eksenine negatif tarafta teget ise, a kaçtır?

- A) -2
B) 0
C) 2
D) 4
E) 6

Cevap Performansı

1	2	3	4
C	D	C	E
D	E	D	A
E	A	E	B
A	B	A	C
B	C	B	D

Performansını görmek için cevaplarını işaretleyip, analarını çizgi ile birleştir.

Doğru Cevaplar
C, D, C, E